運動量と運動エネルギーの微分・積分を用いた考察

物理班　古家正大・石坂栄太郎・加藤悦男・清水良仁・西島正人・吉村卓也

１．はじめに

運動量 mv と運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ の間には速度 v について微分積分の関係があるのではないか、とある時思った。微分積分の関係にある物理量で例えば加速度と速度、距離の関係はとてもわかりやすい。しかし運動量と運動エネルギーについてはどんな関係にあるのか全く見当がつかなかった。もし本当に運動量と運動エネルギーのあいだに微分積分の関係があるのなら、それはどういうことなのだろう。そこで、運動量、運動エネルギーをいろいろな側面から検証してみることにした。

２．運動量と運動エネルギーの歴史

運動量はエネルギーより約２００年前に誕生している。その起源は 14 世紀の哲学者 J．ビュリダンのインペトゥス理論に始まる。

それまでは、物体が運動しているのは物体以外の何者かによって動かされているからだと考えられていた。それに対してビュリダンは「動かすものが動かされるものに与えるもの」があるとし、それをインペトゥスと呼んだ。ほかのものから押され続けられなくても物体そのものの中にそのインペトゥス（外力がかからない限り永久に保存される）が保存されて、運動を維持すると考えた。これは質量が m 、速さが v のとき mv で表される。「運動量」の最初の定義であり、運動の保存量のはじめである。

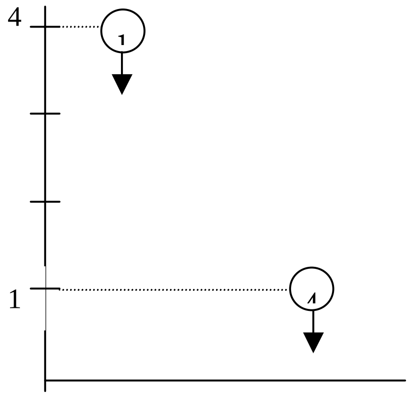
その後デカルトは、宇宙に存在する全運動量は永遠に不変であると考えた。しかし彼はこの法則を用いて衝突の現象をうまく説明することができなかった。その理由の一つは運動量に向きを含めなかったことである。

デカルトの間違いをただし､正しい運動量の保存法則に達したのはホイヘンスで、運動量を向きと大きさをもつ量 $m\vec{v}$ であるとして、衝突の法則を正しく求めた。これだけでは、2 つの未知数を求めることは出来ないので、彼はもう 1 つの式として(質量)×(速度の 2 乗)も保存するという式を用いた。ホイヘンスはこのこと（エネルギー保存則）を、ある高さから出発したおもりは同じ高さまで昇るという振り子の研究から導いたのである。これが運動エネルギーのはじめである。

デカルトに反対してライプニッツは、運動能力は（質量）×(速度の二乗)で測られると主張した｡ガリレイの落下運動の法則を用いたその主張は次のとおりである。

ライプニッツの主張

質量 4 の物体を 1 の高さまで持ち上げる力＝質量 1 の物体を 4 の高さまで持ち上げる力。そこから落下運動をさせる。



$$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g} \quad v_2 = \sqrt{2gh} = 2\sqrt{2g}$$

$$mv_1 = 4\sqrt{2g} \quad mv_2 = 2\sqrt{2g}$$

つまり 1：2 となり物体の持つ能力を正しく表したものではない。

そこで mv^2 という新しい量を取り入れると、

$mv_1{}^2 = 8g \quad mv_2{}^2 = 8g$　となり保存される。

これによりライプニッツは mv^2 の方が物体の持つ能力を正しく表しているとした。

※ ガリレイの落下運動の法則

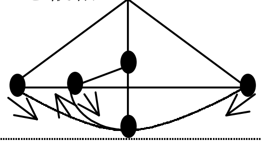
彼はまず、鉛直落下運動と斜面落下運動は同じ性質の運動であると推量し、斜面落下運動の実験をした。いま物体が斜面に沿って落ちて、ある速度を得たとするとき、その速度をもって傾きの異なった斜面の上を昇らせたとする。もし最初に落下した高さよりも高く昇ることができれば、物体をその重さによって高いところへあげる結果となる。これは、物体はそれ自身では降下する傾向のみもつという事実と矛盾するから、上の結果はありえないとした。ここから斜面上を落ちてきた速度は、単にその鉛直の高さのみに関係して、斜面の傾きには関係しない。よってこの速度は斜面の高さだけを自由に落下したときの速度に等しいことが結論される。

ガリレイはこの推量を、摩擦を避けるために振り子を用いて考えた。

振り子の玉は、これが落ち始めた高さと同じだけ、向こう側に戻ってくる。今支持点の真下の様々の適当な場所に釘をさす。すると振り子の糸はこの釘を新しい支持点として振動する。そして、振り子の玉が上昇する最後の点は、最初の落下点と同じ高さであることを確かめた。（図）

こうしてガリレイは自由落下の運動は真空中では一定の加速度を持って起こることを見出した。落下してから t 秒後の物体の速さを v とすれば、加速度は一定、すなわち $v = gt$ （ g は重力加速度）という仮定から出発し、落下距離 S は、時間 t を横軸に、速さ v を縦軸にとった $v-t$ 曲線と t 軸で囲まれた面積に等しいことから

$S = \dfrac{1}{2}vt$　を求め、これから　$S = \dfrac{1}{2}gt^2$　を導いた。



その後どちらが正しい運動能力を表しているのかについて約４０年の論争がはじまったのである。ちなみに mv^2 をエネルギーと呼んだのはヤングであり、力と距離の積を仕事と呼び、仕事と等しくするために mv^2 を $\frac{1}{2}mv^2$ と改めて今の運動エネルギーの形を確立したのはコリオリである。

どちらの量のほうが、物体の持つ能力を正しくあらわしているのだろうか？この論争は、１７４３年のダランベールの「力学論」の序文で決着したことになっている。「どちらでもよい」「問題にすべきではない」というのが彼の結論である。「物体がある速度で１個のばねにぶつかってそれを押し縮めたとすると、２倍の速度でははじめと同等のばねを２個ではなく４個、一気あるいは徐々に押し縮めることができる。以上のことから活力の信奉者は物体の力は一般に質量と速度の２乗の積に比例すると結論する。」「しかし、力を障害の絶対量でなく、障害の抵抗の総和で測るなら、力を質量と速度の積とみなすことが成り立つ。」「後者のほうがより自然な測り方だが、各々好きにすればよい。」

したがって、運動量とエネルギーは障害を克服する能力を時間で考えた力積か、空間的距離で考えた仕事による尺度に関係するといって良いだろう。

３．運動量と運動エネルギーの関係

運動エネルギーと運動量の概念はそれぞれ別なかたちで考えだされ、エネルギー mv^2 も仕事の量との数合わせのために $\frac{1}{2}mv^2$ と改められた。この二つの物理量が式の上で微分積分の関係にあるように見えるのは単なる偶然なのだろうか？

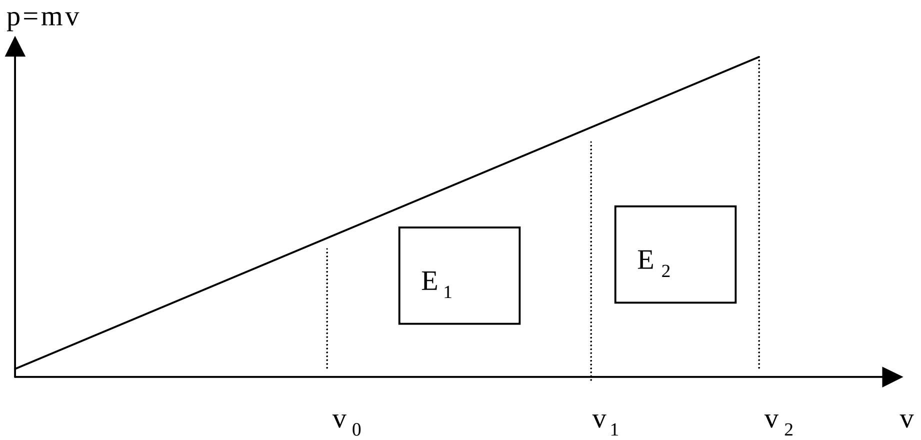
一次元で質量ｍの物体を x_0 から x_1 まで動かすとき、この物体になされた仕事はどのくらいだろう。物体に加えられた力は一定でないので、ごく短い距離ｄｘにおいてなされた仕事を積分していく。

$$\int_{x_0}^{x_1} f \cdot dx = \int_{x_0}^{x_1} m\frac{d^2x}{dt^2}dx = \int_{x_0}^{x_1} m\frac{dx}{dt}d\,\frac{dx}{dt} = \int_{v_0}^{v_1} mvdv = \frac{1}{2}m{v_1}^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2$$

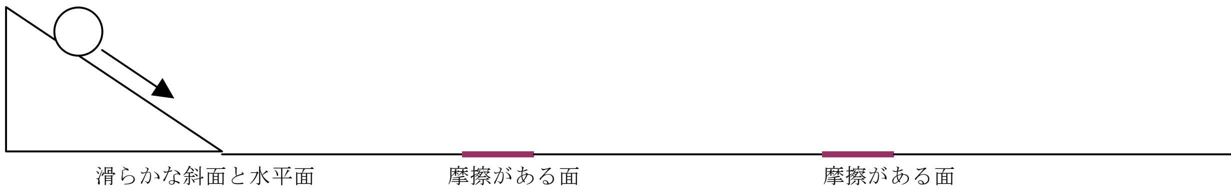
この式から物体の運動量ｍｖを x_0 における速度 v_0 から x_1 における速度 v_1 まで積分すると運動エネルギーの変位になることがわかる。

４．積分についての考察、実験

質量mの物体について、運動量と運動エネルギーの関係をグラフで見る。
ｘ軸は速さｖ、ｙ軸は運動量ｐ＝ｍｖである。



上のグラフでＥ$_1$＝Ｅ$_2$である。上のグラフでＥ$_1$＝Ｅ$_2$であるが$v_1 - v_0 > v_2 - v_1$である。このことを具体的な例で示すために次のような実験をする。



斜面の上から球を静かに放すと球は斜面を滑り落ちて滑らかな水平面上を等速直線運動する。摩擦のある面の上を通過するとき Ｗ＝μ'Ｒｘ　（μ'は動摩擦係数、Ｒは垂直抗力、ｘは面上を玉が移動する距離）の仕事を受けて減速する。二つの面の大きさは等しいとする。

まず２つの球を斜面の上から同時にころがし、片方は滑らかな面の上を、もう一方は摩擦のある面を一度だけ通過するようにする。球が摩擦面を通過後、二秒間に進んだ距離の差を測る。

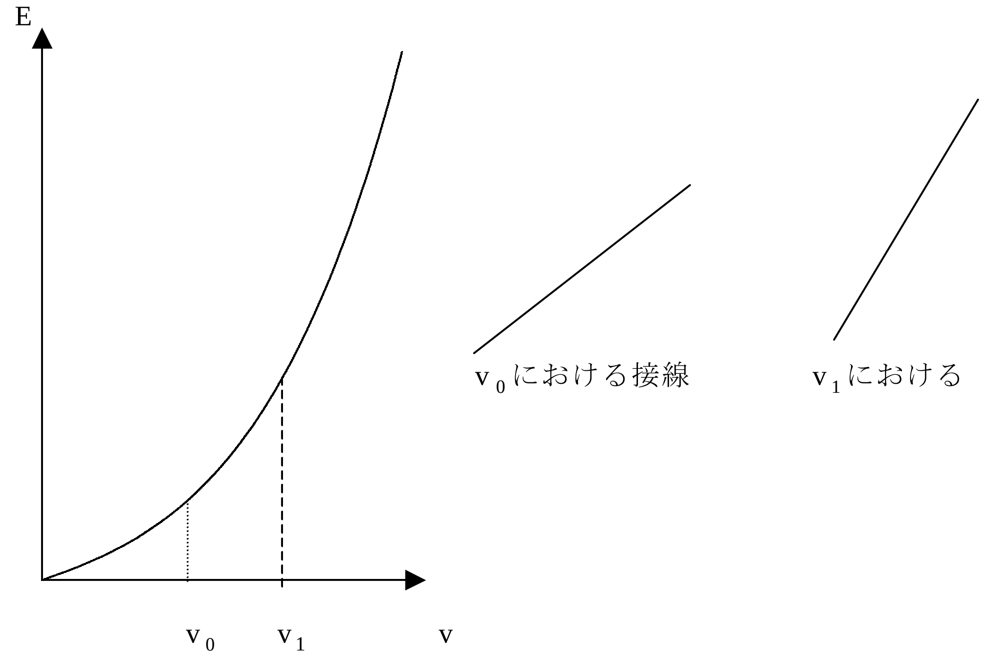
次にもう一度２つの球を斜面の上から同時にころがすが、今度は片方を摩擦のある面を一度、もう一方を二度通過するようにし、一回目と同じ条件で距離の差を測る。

測った距離の差は同じ一定の時間に進んだ距離の差であるから速度の差と等しい。二つの球の距離の差が一回目よりも二回目のほうが開いていたら、球は最初の摩擦面よりも二箇所目の摩擦面でより減速されたことになる。

５．微分についての考察、説明

質量ｍの物体について運動エネルギーと運動量の関係をグラフで見る。

今度はｘ軸を速さｖ、ｙ軸を運動エネルギー$E = \frac{1}{2}mv^2$とする。



接線

上のグラフでは運動量ｍｖは放物線のｖにおける接線の傾きであり、エネルギーの増加率である。例えば質量ｍの物体で速さ v_0 で運動してるものと速さ v_1 で運動しているものに同じ大きさの力積をくわえ加速させるとき、速さの増加量はどちらの場合も等しいが、エネルギーの増加量は後者のほうが大きいということになる。

力積は F・ｔ（F は力、ｔは時間）であらわされ、エネルギーの増加量は物体にされた仕事Ｆ・ｘ（ｘは物体を動かした距離）と等しい。ここでｘを力積が加えられている間に進んだ距離と考えると、当然速い物体を押すときのほうが押す力と押している時間が等しくても押した距離は長くなるので仕事の量も大きくなり、エネルギーもより多く増加する。

６．まとめ

僕たちの研究の始まりの目的は「運動量と運動エネルギーが微分積分の関係にあることを実感できる実験をすること、具体的なイメージを持つこと」だった。この課題研究で運動量と運動エネルギーの成り立ちや意味、微分積分を使った運動量から運動エネルギーを導く方法、物体の運動がかわるときに２つの物理量が微分積分の関係に従ってどのように変化するかについて調べたがこれといった結論はなく、まだ当初の目的は達成されてないような気がする。

僕たちの課題研究はここで終えるが、また機会があったらこの問題について考えてみたい。

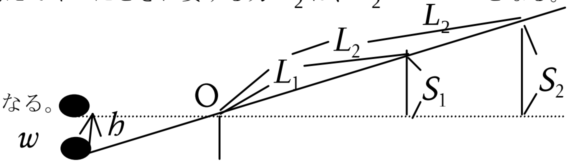
おまけ

仕事の概念はなぜ（力）×（距離）なのか？

重さ w の石をてこを使って高さ h だけ持ち上げる。支点 O から石までの腕の長さを l とし、力の作用点 P までの腕の長さを L_1 とすると、石を持ち上げるのに要する力 F_1 はてこの原理より、$F_1 = \dfrac{wl}{L_1}$ となる。

次に同じことを腕の長さを L_2 ($> L_1$ とする)に変えてやったときに要する力 F_2 は、$F_2 = \dfrac{wl}{L_2}$ となる。

これらの式から $F_1 L_1 = F_2 L_2 \cdots (1)$ となる。



つまり $F_1 < F_2$ となり腕の長さを長くするほど加える力は小さくなる。しかし石を h だけ持ち上げたという結果はどちらの場合も同じである。従って、石を持ち上げるという仕事に対する評価を、加えた力の大きさで行うのはおかしい。同じ結果ならば、仕事の量にも同一の値を与えるべきであろう。ところが (1) をみると、加えた力と腕の長さの積は同じ値を与える。そこでこの積でもって、石を持ち上げた仕事の量と考えるのが適当である。しかし、何らかの理由で支点が分からない場合、腕の長さが分からなくなってしまう。ところが、それぞれの場合の作用点 P の移動距離を s_1 および s_2 とすると、明らかに $\dfrac{s_1}{s_2} = \dfrac{L_1}{L_2}$ であるので、

(1) の代わりに $F_1 s_1 = F_2 s_2$ とする。

すると、この量を仕事と定義すれば、支点の位置が分からなくても、それを評価することが可能になる。また、力を加えた本人自身の持つ知識だけで仕事の量を知ることが出来る。また、石を直接持ち上げるような場合にも仕事を測ることが出来る。よって、仕事(力)×(距離)で定義されるようになった。

単振動について

・抵抗がない場合

ばねに質量mのおもりをつけ、時刻tにおける

おもりの自然長からの変位$x(t)$とすると

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \cdot\cdot\cdot ①$$ （kはばね定数）

この微分方程式を満たす関数$x(t)$を求める

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

この微分方程式を満たす関数$x(t)$を求める

①の両辺に$x'(t)$をかけると

$$x''(t)x'(t) = -\frac{k}{m}x(t)x'(t) \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

$$\{x(t)^2\}' = 2x(t)x'(t),$$

$$\{x'(t)^2\}' = 2x'(t)x''(t)$$ であることに注意

すると

②は $$\frac{1}{2}\{(x'(t))^2\}' = -\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{2}\{(x(t))^2\}'$$

$$\therefore \{(x'(t))^2\}' = -\frac{k}{m}\{(x(t))^2\}'$$

両辺積分して

$$(x'(t))^2 - (x'(0))^2 = -\frac{k}{m}\{(x(t))^2 - (x(0))^2\}$$

$$\therefore (x'(t))^2 + \frac{k}{m}(x(t))^2 = (x'(0))^2 + \frac{k}{m}(x(0))^2 \quad \cdot\cdot\cdot ③$$

(この両辺に$\frac{1}{2}m$をかけるとエネルギー保存の式になる。)

③の右辺をR^2とおくと

tの関数$\theta(t)$を用いて

$$x'(t) = R\cos\{\theta(t)\} \quad \cdot\cdot\cdot ④$$ とおける

④より $$\sqrt{\frac{k}{m}}x(t) = R\sin\{\theta(t)\}$$

$$\Leftrightarrow x(t) = R\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\{\theta(t)\}$$

両辺時間微分すると

$$x'(t) = R\sqrt{\frac{m}{k}}\cos\{\theta(t)\}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{m}{k}}\cdot\frac{d\theta}{dt} = 1$$ ($\because$ ④より)

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \therefore \theta(t) = \sqrt{\frac{k}{m}}t + C_1$$

（C_1は定数）

よって $$x(t) = R\sqrt{\frac{m}{k}}\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_1)$$

$$\therefore x(t) = C_2\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_1)$$

$$(C_2 = R\sqrt{\frac{m}{k}})$$

以上より、$x''(t) = -\omega^2 x(t)$の一般解は

$$x(t) = A\sin(\omega t + B)$$

$$\therefore x(t) = A_1\sin\omega t + A_2\cos\omega t$$ と表せる

・抵抗があるとき

空気抵抗 $-lv$ とすると

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx-l\frac{dx}{dt}$$

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x-\frac{l}{m}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$\dfrac{k}{m}=K,\quad \dfrac{l}{m}=L$ とし

$x''(t)=-Lx'(t)-Kx(t)$ と書くと

$x''(t)+Lx'(t)+Kx(t)=0$ ・・・⑤

この方程式の特性方程式

$\lambda^2+L\lambda+K=0$ ・・・⑥ の解 α,β とおく

(i) $L^2-4K>0$ のとき

α,β が⑥の異なる２実数解になるときで

$$x(t)=C_1e^{\alpha t}+C_2e^{\beta t}$$

$L>0,\quad M>0$ だから

α,β が実数の場合は解と係数の関係から

$\alpha+\beta=-L<0,\quad \alpha\beta=M>0$

よって α,β は共に負となり、

$y=x(t)$ のグラフは右のようになる

(ii) $L^2-4k=0$ のとき

$\alpha=\beta$ のときで、

$$x(t)=(C_1t+C_2)e^{\alpha t}$$

よって $y=x(t)$ のグラフは右のようになる

(iii) $L^2-4K<0$ のとき

α,β は互いに共役な虚数となる

$\alpha=a+bi,\beta=a-bi$ とおくと、

$$L=-2a,M=a^2+b^2$$

③は $x''(t)-2ax'(t)+a^2+(a^2+b^2)x(t)=0$

両辺に e^{-at} をかけて

$$e^{-at}x''(t)-2ae^{-at}x'(t)+a^2e^{-at}x(t)=-b^2e^{-at}x(t)$$

$$\Leftrightarrow e^{-at}x''(t)-2(e^{-at})'x'(t)+(e^{-at})''x(t)=-b^2e^{-at}x(t)$$

$$\Leftrightarrow \{e^{-at}x(t)\}''=-b^2(e^{-at}x(t))$$

となり、$z=e^{-at}x(t)$ とおくと $z''(t)=-b^2z(t)$ となる

$x(t)=A\sin(\omega t+B)$ から $z(t)$ は

$z(t)=C_1\sin(bt+C_2)$ となり、ここから

$$e^{-at}x(t)=C_1\sin(bt+C_2)$$

$\therefore x(t)=C_1e^{at}\sin(bt+C_2)$ となる

$2a=-L<0$ より、a が負であることに注意して

$y=x(t)$ のグラフをかくと右のようになる