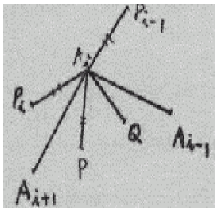
(2) 三角形の等角共円点について

高橋　玄顕

定理１　凸 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ の内部に２点 P, Q があり、∠ＰＡ $_i A_{i+1}$＝∠ＱＡ $_i A_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$ ならば　∠Ｐ $A_nA_1=$ ∠Ｑ $A_nA_{n-1},(A_n=A_0)$

証明　$\angle A_j=\theta_j(1\le j\le n),$ また $1 \leqq i \leqq n-1$ に対して $\alpha_i=\angle PA_iA_{i+1}=\angle QA_iA_{i-1}$ とする

そして $\beta_i=\theta_i-\alpha_i$ とおき、P の A_iA_{i+1} に関する対称点を P_i とする



$$\angle A_{i-1}A_iP_{i-1}+\angle A_{i-1}A_iQ$$
$$=\angle A_{i-1}A_iP+\angle A_{i-1}A_iQ=\beta_i+\alpha_i=\theta_i<\pi$$

Q と P_{i-1} は $A_{i-1}A_i$ に関して反対側にあるので $\angle QA_iP_{i-1}=\theta_i$, 全く同様に $\angle QA_iP_i=\theta_i$,

また $A_iP_{i-1}=A_iP_i, A_iQ$ 共通より $\Delta A_iP_{i-1}Q\equiv\Delta A_iP_iQ,$ これより $P_{i-1}Q=P_iQ,$

$\therefore P_0Q=P_1Q=\cdots=P_{n-1}Q,$ ところで $A_nP_0=A_nP=A_nP_{n-1}, QA_n$ 共通より

$\Delta QA_nP_0\equiv\Delta QA_nP_{n-1},\therefore\angle QA_nP_0=\angle QA_nP_{n-1}$, また

$$2\angle QA_nP_{n-1}=\angle P_0A_nQ+\angle QA_nP_{n-1}=2\angle PA_0A_1+2\angle PA_0A_{n-1}=2\theta_n,$$

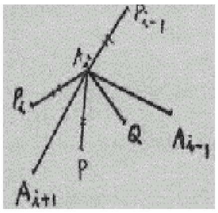
$$\therefore\angle PA_nA_1=\theta_n=\angle P_0A_nQ,\angle P_0A_nA_1=\angle P_0A_nQ-\angle A_1A_0Q=\theta_i-\angle A_1A_0Q=\angle QA_0A_{n-1}$$

$$\therefore\angle PA_nA_1=\angle QA_nA_{n-1}$$

定理２　A. 凸 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ は、P, Q を焦点とするある楕円 C に外接する

B．凸ｎ角形 $A_1A_2\cdots A_n$ がある楕円に外接するときその凸 n 角形は、定理１のようである

証明　A.　P, Q を焦点とする長半径 $\dfrac{P_0Q}{2}$ の楕円を C とする。直線 A_iA_{i+1} 上の任意の点を X_i



とすると、三角不等式より $PX_i+QX_i=P_iX_i+QX_i\ge P_iQ=P_0Q$

であり、等号成立は X_i が直線 A_iA_{i+1} と P_iQ の交点 R_i に一致する

ときである。 R_i は楕円の定義より C 上に存在する。一方直線 A_iA_{i+1}

はＣの外部（周上も含む）に存在しているのでＣと直線 A_iA_{i+1} は R_i で接する。i は任意な

ので凸 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ はＣの外部（周上を含む）に存在して、各辺はＣと接することより題意は示された。

証明Ｂ．ある楕円と直線 A_iA_{i+1} との接点を Y_i 、ある楕円の焦点をＰ，Ｑ。Ｐの A_iA_{i+1} に関する対称点を P_i とすると、直線 A_iA_{i+1} と Y_i で垂直に交わる直線は $\angle PY_iQ$ の角の二等分線で

あるという楕円の性質より $\angle P_iY_iQ=\pi,$ よって３点 P_i, Y_i, Q は一直線上にあり、

$P_iQ=PY_i+Y_iQ,$ 後は定理１と同様にして示せる。ただし定理２の証明において

$i=1,2,\Lambda\ ,n$ である。また定理１の $n=3$ のときを考えるとどんな三角形にも楕円は内接

することがわかる。