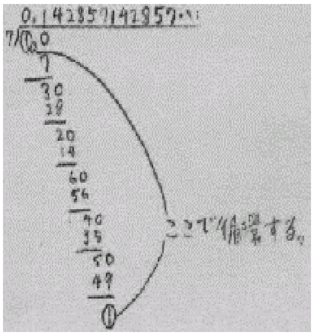
(3) $\dfrac{1}{n}$（nは素数）の循環小数について　　車　朋希

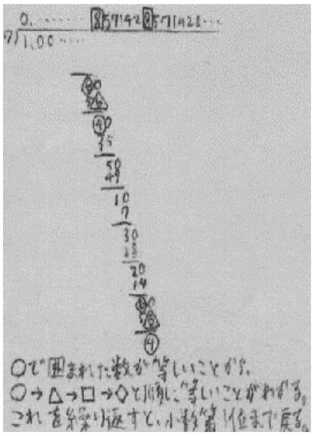
1. 循環節の桁数　〈例〉$\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}$…6 桁　$\frac{1}{11}=0.\dot{0}\dot{9}$…2 桁

定理 I. 循環節の桁数は、10^nを分母で割った余りが 1 になる最小の n と一致する。

―証明―



割り算をしていって、前に一度出た余りと等しい余りが出れば、そこで同じ計算が繰り返され、循環する。最初の割られる数は 1 なので、余り 1 が出ても同様に循環する。定理 I は、 $1 \div n$ （nは素数）の計算は必ず余り 1 によって循環し、他の余りが二度出ることはないということであり、またそのとき、循環節は小数第 1 位から始まる。 つまり、$\frac{1}{n}$の循環節が必ず小数第 1 位から始まることを示せばよい。



小数中に循環節が存在するとき、その前後に出た余りは等しい。余りが等しいということは、(その前の余り) × 10 - 割る数 × (その前の位の数) が等しいということであり、 (前の余り) × 10 の一の位は必ず 0 であるため、割る数 × (前の位の数) の一の位の数が等しいと言える。一の位が 1, 3, 7, 9 のいずれかの数は、かける数の一の位と積の一の位が一対一対応であるため、積の一の位からかける数、つまり前の位の数を一つに特定することができる。前の位の数が等しければ、{(割る数) × (前の位の数) + (余り)} ÷ 10 で前の余りも等しいといえる。よって、割る数が素数のとき、小数中のある箇所に循環節が存在すればその前の位の数も循環節に含むことができることになり、これを繰り返せば循環節は小数第一位から始まることになる。2, 5 を除く素数の一の位は 1, 3, 7, 9 のいずれかであるため、$1 \div n$ （nは素数）の循環節は小数第一位から始まる。よって、命題成立。

2. 循環節が偶数桁の循環小数の法則

定理 II. 循環節を半分に分けて加えると、各位の数は全て 9 になる。

〈例〉$\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}$　$142+857=999$　$\frac{1}{13}=0.\dot{0}7692\dot{3}$　$076+923=999$

―証明―

$\frac{1}{\alpha}$の循環節が $2k$ 桁だとすると、定理 I より、10^nをαで割った余りが 1 になる最小の n が $2k$ となる。これより、$10^{2k}-1$ はαの倍数。 $10^{2k}-1=(10^k+1)(10^k-1)$より、$10^k+1$ と 10^k-1 のうち少なくとも一方はαの倍数。ここで 10^k-1 がαの倍数とすると、10^kをαで割った余りが 1 となり、$2k$ が条件を満たす最小の n でなくなるため、不適。よって、10^k+1 がαの倍数。つまり、$(10^k+1)\div\alpha$ は整数。$\frac{1}{\alpha}=0.\dot{a}_1a_2\cdots a_na_{n+1}a_{n+2}\cdots\dot{a}_{2n}$（ただし小数展開）とおくと、$\dfrac{10^k+1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}\times 10^k+\frac{1}{\alpha}=a_1a_2\cdots a_n.a_{n+1}a_{n+2}\cdots\dot{a}_{2n}+0.\dot{a}_1a_2\cdots\dot{a}_n=a_1a_2\cdots a_n.\dot{b}_1b_2\cdots\dot{b}_n$　$(b_1b_2\cdots b_n=a_1a_2\cdots a_n+a_{n+1}a_{n+2}\cdots\dot{a}_{2n})$ となる。整数となるためには、小数部分がちょうど 1、つまり 0.999…… の循環小数でなければならない。よって、 $b_1b_2\cdots b_n=a_1a_2\cdots a_n+a_{n+1}\cdots a_{2n}=999\cdots\cdots$ となる。