

(5) 集合の濃度について～ルベグ積分への発展～

小森 聖子

★集合の濃度

集合の元の数について考えます。元の数が有限の場合、それは有限集合と言われます。問題は元が無限にある無限集合の場合です。自然数は1, 2, 3, ...と際限がありません。この無限の大きさを可算無限といい、この集合を可算集合といいます。この自然数と1:1の対応のつく大きさを \aleph_0 と書き、アレフゼロと読み、このような集合の大きさを濃度(基数ということもある)という言葉で表現します。

■ 有理数について

有理数の集合の濃度について考えます。まず、有理数の集合を Q とすると、その濃度は可算集合のそれと同じで \aleph_0 です。

【証明】有理数は分数で表されるので、図Aのように分数を分母の同じ数ごとに並べていきます。矢印のように並べてゆくのですが、同じ数は二度と書かないことにします。こうするとすべての有理数が並べられることがわかります。すると図Bのようにこれらは自然数と1:1に対応づけられるのです。よって、集合 Q は可算集合となり、その濃度は \aleph_0 であることが示されます。

■ 実数について

次に実数の集合 R の濃度について考えます。実数は有理数に無理数を加えたものですが、これは自然数と1:1の対応がつかない、もっと濃度の大きな無限大であることが次のように示されます。この証明方法はカントールの対角線論法といわれて有名な方法です。

【証明】いま、区間 $[0, 1]$ の実数の集合を R_0 とし、その元 X を考えます。 X は無限小数で表されるので、それを

$$X = 0, X_1, X_2, X_3, \dots$$

と記してみます。さらに、有限小数、例えば0.354などは35999...と表すことに約束します。ここで、実数 R_0 が可算集合と仮定して、

R_0 の元に番号をつけて図Cの $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ のように並べられたとします。ところが、この $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ に入らない小数が存在するのです。それは例えば、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ の桁から対角線上の $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \dots$ を取り出して、そこだけ異なる数 $X_{11}, X_{22}, X_{33}, \dots$ とした数考えるのです。

$$0, X_{11}, X_{22}, X_{33}, \dots$$

のように作った小数 X は図Cのどの α_i ($i = 1, 2, 3, \dots$)にも入らないのです。なぜならば

$$\text{第1番目の桁が } \alpha_1 \text{ と違うから } X \neq \alpha_1$$

$$\text{第2番目の桁が } \alpha_2 \text{ と違うから } X \neq \alpha_2$$

⋮

となって、上の X はどの α_i ($i = 1, 2, 3, \dots$)とも異なることが

わかります。よって、実数は有理数と1:1の対応がつかない集合であることが示されたこととなります。この集合を非可算集合といいます。

この集合の濃度を \aleph_1 (アレフワン)とすると $\aleph_0 < \aleph_1$ です。 \aleph_1 を連続体の濃度といいます。

■ 無理数について

では、無理数の濃度について考えます。無理数の濃度は実数のそれと同じで \aleph_1 です。

【証明】まずここで無理数の濃度は有理数のそれと同じで \aleph_0 と仮定します。実数は有理数に無理数を加えたもので、実数=有理数+無理数と表すことができます。ところがここで有理数と無理数の濃度が \aleph_0 であるならば、実数の濃度も \aleph_0 となります。しかし実数の濃度は上記より \aleph_1 なのでここで矛盾が起こります。すなわち無理数の濃度は \aleph_0 ではなく、 \aleph_1 であることが示されます。

★ 発展～ルベグ積分への応用～

よって、今集合の濃度を学んだことにより、ルベグ積分の概念もかめることができるようになりました。までの知識からできる積分をしようと思います。 Q は有理数として

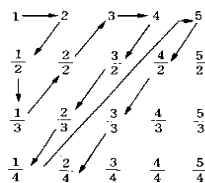
$$\int_0^1 f(x) dx = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$$

この関数は集合の濃度とルベグ積分の概念を用いると次のように表すことができます。

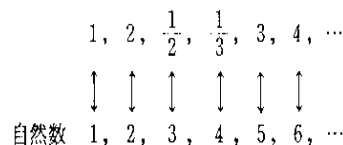
$$\int_0^1 f(x) dx = 1 \times \{[0, 1] \text{区間の有理数の測度}\} + 0 \times \{[0, 1] \text{区間の無理数の測度}\} = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$$

したがって、上の関数の積分値は0になりました

図A



図B



図C

$\alpha_1 = 0,$	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	...
$\alpha_2 = 0,$	α_{21}	α_{22}	α_{23}	α_{24}	...
$\alpha_3 = 0,$	α_{31}	α_{32}	α_{33}	α_{34}	...
$\alpha_4 = 0,$	α_{41}	α_{42}	α_{43}	α_{44}	...