（５）集合の濃度について～ルベーグ積分への発展～

小森　聖子

☆集合の濃度

集合の元の数について考えます。元の数が有限の場合、それは有限集合と言われます。問題は元が無限にある無限集合の場合です。自然数は１，２，３，・・・と際限がありません。この無限の大きさを可算無限といい、この集合を可算集合といいます。この自然数と1：1の対応のつく大きさを $\aleph_0$ と書き、アレフゼロと読み、このような集合の大きさを濃度（基数ということもある）という言葉で表現します。

■　　有理数について

有理数の集合の濃度について考えます。まず、有理数の集合をQとすると、その濃度は可算集合のそれと同じで $\aleph_0$ です。

【証明】有理数は分数で表されるので、図 A のように分数を分母の同じ数ごとに並べていきます。矢印のように並べてゆくのですが、同じ数は二度と書かないことにします。こうするとすべての有理数が並べられることがわかります。すると図 B のようにこれらは自然数と1：1に対応づけられるのです。よって、集合 Q は可算集合となり、その濃度は $\aleph_0$ であることが示されます。

■　　実数について

次に実数の集合Rの濃度について考えます。実数は有理数に無理数を加えたものですが、これは自然数と1：1の対応がつかない、もっと濃度の大きな無限大であることが次のように示されます。この証明方法はカントールの対角線論法といわれて有名な方法です。

【証明】いま、区間[０．１]の実数の集合をR $_0$ とし、その元 X を考えます。X は無限小数で表されるので、それを

$X=0.\ x_1, x_2, x_3 \cdots$

と記してみます。さらに、有限小数、例えば0，354などは35999・・・と表すことに約束します。ここで、実数 R $_0$ が可算集合と仮定して、R $_0$ の元に番号をつけて図Cの α_1、α_2、α_3、・・・のように並べられたとします。ところが、この α_1、α_2、α_3・・・に入らない小数が存在するのです。それは例えば、α_1、α_2 ・・・の桁から対角線上の α_{11}、α_{22}、α_{33} ・・・を取り出して、そこだけ異なる数 x_{11}, x_{22}, x_{33} ・・・とした数を考えるのです。

$0.\ x_{11}, x_{22}, x_{33} \cdots$

のように作った小数 X は図Cのどの α_i（i＝１，２，３，・・・）にも入らないのです。なぜならば

第１番目の桁が α_1 と違うから　　$X \neq \alpha_1$

第2番目の桁が α_2 と違うから　　$X \neq \alpha_2$

：

となって、上の X_0 はどの α_i（i＝１，２，３、・・・）とも異なることがわかります。よって、実数は有理数と1：1の対応がつかない集合であることが示されたことになります。この集合を非可算集合といいます。

この集合の濃度を $\aleph_1$（アレフワン）とすると　$\aleph_0 \subset \aleph_1$ です。$\aleph_1$ を連続体の濃度といいます。

■　　**無理数について**

では、無理数の濃度について考えます。無理数の濃度は実数のそれと同じで $\aleph_1$ です。

【証明】まずここで無理数の濃度は有理数のそれと同じで $\aleph_0$ と仮定します。実数は有理数に無理数を加えたものなので、実数＝有理数＋無理数と表すことができます。ところがここで有理数と無理数の濃度が $\aleph_0$ であるならば、実数の濃度も $\aleph_0$ となります。しかし実数の濃度は上記より $\aleph_1$ なのでここで矛盾がおこります。すなわち無理数の濃度は $\aleph_0$ ではなく、$\aleph_1$ であることが示されます。

☆ 発展～ルベーグ積分への応用～

よって、今集合の濃度を学んだことにより、ルベーグ積分の概念もからめることができるようになりました。までの知識からできる積分をしようと思います。Q は有理数として

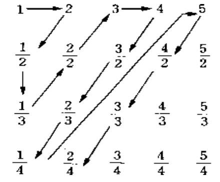
$$\int_0^1 f(x)dx = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$$

この関数は集合の濃度とルベーグ積分の概念を用いると次のように表すことができます。

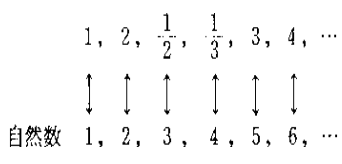
$$\int_0^1 f(x)dx = 1 \times \{[0,1]\text{区間の有理数の測度}\} + 0 \times \{[0,1]\text{区間の無理数の測度}\} = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$$

したがって、上の関数の積分値は０になりました

図A



図B



図C

$\alpha_1 \quad 0.\ \alpha_{11} \quad \alpha_{12} \quad \alpha_{13} \quad \alpha_{14} \quad \cdots$

$\alpha_2 = 0.\ \alpha_{21} \quad \alpha_{22} \quad \alpha_{23} \quad \alpha_{24} \quad \cdots$

$\alpha_3 = 0.\ \alpha_{31} \quad \alpha_{32} \quad \alpha_{33} \quad \alpha_{34} \quad \cdots$

$\alpha_4 = 0.\ \alpha_{41} \quad \alpha_{42} \quad \alpha_{43} \quad \alpha_{44} \quad \cdots$