

## (6) 抜き打ちテストは実行できるのか!?

### ～パラドックスの世界から集合の定義へ～

谷道 麻衣

#### ～プロローグ～

ある教授の言葉 『来週の月曜から金曜までの間に1回だけテストを行う。どの日にテストを行うかは当日にならなければ分からない。』さてこの教授、ぬきうちテストはできるのでしょうか?もし金曜に行くとすると、月から木までやらないから金曜に行くことがわかってしまいます。では木曜に行くとすると…

#### 集合論のパラドックス

##### ①ラッセルパラドックス

私達が使っている教科書によると“はっきりした条件を満たすものの集まりを集合という”と集合を定義しています。集合に属するものを要素と名づけています。さて、以下のことを考えます。ある集合 $\{a, b, c\}$ に対し、 $x$ がこの集合の要素であるかどうかは $(x = a) \cup (x = b) \cup (x = c)$ が成立するかどうかを調べればよいわけです。したがって、二つの集合 $S_1$ と $S_2$ が与えられれば、それらのどちらにも含まれる要素からなる集合 $S_1 \cap S_2$ というのは簡単に定義でき、

$\{x \mid x \in S_1 \cap x \in S_2\}$ では、“自分の要素でないもの”というのはどう判断すればよいのでしょうか?自分の要素が決まっていれば、上記と同じようにそれらと比べれば良く、 $A = \{a, b, c\}$ とすると、 $A$ の要素でないものは $(x \neq a) \cap (x \neq b) \cap (x \neq c)$ とあらわされます。つまり補集合 $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$ となります。

さてここで問題です。“自分自身の要素でないもの”は集合の記法では $x \notin x$ と書けます。したがって“自分の要素でないものだけを含む集合”は $B = \{x \mid x \notin x\}$ と定義できますが、さて、この集合自身( $B$ と呼ぶことにする)はこの集合の要素でしょうか?もしそうだとすると $B$ は $B \notin B$ を満たすはずだから、 $B$ は $B$ の要素ではありません。しかし、 $B$ が $B$ の要素でないとすると、定義を満たすからこの集合の要素のはずである…?これがラッセルのパラドックスとな

ります。つまり、教科書のように集合を定義すると、パラドックスがおこるのです。では、集合をどのように定義すればよいのでしょうか?

##### ②ZF集合論

パラドックスを回避するために様々な試みが行われてきました。その手法として集合を素朴に要素から定義するのではなく、特定の公理を満たすものとして位置付ける考え方が浮かび上がってきました。それがツェルメロとフランクフルトによるZF集合論なのです。これは以下の公理群から成り立っています。

**公理1**  $\forall x \quad x \notin \phi$

これは、 $\phi$ という定数の定義です。つまり $\phi$ とは要素をもたない定数(空集合)なのです。

**公理2** フランクフルトの置換公理: 任意の集合 $a$ に対して

$$\{y \mid \exists x \in a (x, y) \in A\}$$

$A$ という2要素から構成された集合があるとき、 $a$ が集合であれば、その要素 $x$ と一対一対応がとれる要素 $y$ から構成されるものも集合であるという公理です。全部の要素を一対一に対応づけることのできる集合はみな同じ大きさであるという意味です。

**公理3** 基底公理  $A \neq \phi \rightarrow \exists x \in A (x \cap A = \phi)$

$A$ が空でない集合ならば、 $A$ の元 $x$ であって $A$ と $x$ とが共通の元を含まないようなものが存在します。これにより、どんな集合も自分自身を含まないことが結論されます。実際、 $P$ を任意の集合とし、 $\{P\}$ を $A$ とおけば、公理3により $\{P\} \cap P = \phi$ でなければならない。したがって、すべての集合は自分の要素ではないのだから  $P \notin P$ …※

さて、※よりラッセルのパラドックスを構成する集合 $R = \{x \mid x \notin x\}$ は集合全体の集合となり、 $R$ は公理3を満たさない。つまり $R$ は集合ではなくなるわけです。(Rのことをクラスと呼びます。)

このようにしてラッセルのパラドックスは集合から除外されるわけです。