（６）抜き打ちテストは実行できるのか！？
～パラドックスの世界から集合の定義へ～

谷道　麻衣

～プロローグ～

ある教授の言葉　『来週の月曜から金曜までの間に１回だけテストを行う。どの日にテストを行うかは当日にならなければ分からない。』さてこの教授、ぬきうちテストはできるのでしょうか？もし金曜に行うとすると、月から木までやらないから金曜に行うことがわかってしまいます。では木曜に行うとすると…

集合論のパラドックス

①ラッセルパラドックス

私達が使っている教科書によると“はっきりした条件を満たすものの集まりを集合という”と集合を定義しています。集合に属するものを要素と名づけています.さて、以下のことを考えます。ある集合{a,b, c}に対し、x がこの集合の要素であるかどうかは（x＝a）$\cup$（x＝b）$\cup$（x＝c）が成立するかどうかを調べればよいわけです．したがって、二つの集合S1とS2が与えられれば、それらのどちらにも含まれる要素からなる集合S1∩S2というのは簡単に定義でき、

{x｜x$\in$ S1$\cap$ x$\in$ S２}　では、“自分の要素でないもの”　というのはどう判断すればよいでしょうか？自分の要素が決まっていれば、上記と同じようにそれらと比べれば良く、A＝{a，b，c}とすると、Aの要素でないものは

（x$\neq$a）$\cap$（x$\neq$b）$\cap$（x$\neq$c）　とあらわされます。つまり補集合 $\overline{A}$ ＝{x｜x$\notin$ A}　となります。

さてここで問題です。“自分自身の要素でないもの”は集合の記法では　x$\notin$ x　と書けます。したがって“自分の要素でないものだけを含む集合”は　B＝{x｜x$\notin$ x}と定義できますが、さて、この集合自身（Bと呼ぶことにする）はこの集合の要素でしょうか？もしそうだとするとBはB$\notin$ Bを満たすはずだから、BはBの要素ではありません。しかし、BがBの要素でないとすると、定義を満たすからこの集合の要素のはずである…？これがラッセルのパラドックスとなのです。つまり、教科書のように集合を定義すると、パラドックスがおこるのです。では、集合をどのように定義すればよいのでしょうか？

②ＺＦ集合論

パラドックスを回避するために様様な試みが行われてきました。その手法として集合を素朴に要素から定義するのではなく、特定の公理を満たすものとして位置付ける考え方が浮かび上がってきました。それがツェルメロとフランケルによるＺＦ集合論なのです。これは以下の公理群から成り立っています。

公理１　$\forall x \quad x \notin \phi$

これは、ϕ という定数の定義です。つまり ϕ とは要素をもたない定数(空集合)なのです。

公理２　フランケルの置換公理：任意の集合ａに対して

$$\{y \mid \exists x \in a(\langle x, y\rangle \in A)\}$$

Ａという２要素から構成された集合があるとき、ａが集合であれば、その要素ｘと一対一対応がとれる要素ｙから構成されるものも集合であるという公理です。全部の要素を一対一に対応づけることのできる集合はみな同じ大きさであるという意味です。

公理３　基底公理　$A \neq \phi \rightarrow \exists x \in A(x \cap A = \phi)$

Ａが空でない集合ならば、Ａの元ｘであってＡとｘとが共通の元を含まないようなものが存在します。これにより、どんな集合も自分自身を含まないことが結論されます。実際、Ｐを任意の集合とし、{P}をＡとおけば、公理３により{P}∩Ｐ＝ϕ でなければならない。したがって、すべての集合は自分の要素ではないのだから　P$\notin$ P…※

さて、※よりラッセルのパラドックスを構成する集合Ｒ＝{x｜x$\notin$ x}は集合全体の集合となり、Ｒは公理３を満たさない。つまりＲは集合ではなくなるわけです。(Ｒのことをクラスと呼びます。)

このようにしてラッセルのパラドックスは集合から除外されるわけです。