

平成 13 年度

理数科課題研究

No. 32

富山県立富山中部高等学校

平成13年度 理数科課題研究発表会

日時 平成14年2月6日(水) 14時20分～16時10分

場所 視聴覚室

発表順

- 1班(物理)「運動量とエネルギー」
石坂・加藤・清水・西島・古家・吉村
- 2班(物理)「波動について」
植田・堀内・三浦・山崎・山崎
- 3班(化学)「アゾ染料の合成」
浅林・鹿・中川・深瀬・舟坂
- 4班(化学)「Chem3Dを使った化学反応の研究」
有沢・小柳・高柳・田中・森
- 5班(生物)「プロトプラストの単離と融合」
大浦・楠井・石戸・森田・吉岡・若林
- 6班(生物)「ヒトの感覚」
岡崎・老田・河合・坂田・新村・橋本・前川
- 7班(数学)「興味ある8つの話題について」
車・小森・坂野・谷道・高橋・木田

指導者

- 物理分野 堀、笹川、児堂
化学分野 酒井、山本、中島
生物分野 永井、山崎、西野
数学分野 盛本

運動量と運動エネルギーの微分・積分を用いた考察

物理班 古家正大・石坂栄太郎・加藤悦男・清水良仁・西島正人・吉村卓也

1. はじめに

運動量 mv と運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ の間には速度 v について微分積分の関係があるのではないか、とある時思った。微分積分の関係にある物理量で例えば加速度と速度、距離の関係はとてもわかりやすい。しかし運動量と運動エネルギーについてはどんな関係にあるのか全く見当がつかなかった。もし本当に運動量と運動エネルギーのあいだに微分積分の関係があるのなら、それはどういうことなのだろう。そこで、運動量、運動エネルギーをいろいろな側面から検証してみることにした。

2. 運動量と運動エネルギーの歴史

運動量はエネルギーより約 200 年前に誕生している。その起源は 14 世紀の哲学者 J. ビュリダンのインペトゥス理論に始まる。

それまでは、物体が運動しているのは物体以外の何者かによって動かされているからだと考えられていた。それに対してビュリダンは「動かすものが動かされるものに与えるもの」があるとし、それをインペトゥスと呼んだ。ほかのものから押し続けられなくても物体そのものの中にそのインペトゥス（外力がかからない限り永久に保存される）が保存されて、運動を維持すると考えた。これは質量が m 、速度が v のとき mv で表される。「運動量」の最初の定義であり、運動の保存量のはじめである。

その後デカルトは、宇宙に存在する全運動量は永遠に不変であると考えた。しかし彼はこの法則を用いて衝突の現象をうまく説明することができなかった。その理由の一つは運動量に向きを含めなかったことである。

デカルトの間違いをただし、正しい運動量の保存法則に達したのはホイヘンスで、運動量に向きと大きさをもつ量 $m\vec{v}$ であるとして、衝突の法則を正しく求めた。これだけでは、2 つの未知数を求めることは出来ないなので、彼はもう 1 つの式として (質量) × (速度の 2 乗) も保存するという式を用いた。ホイヘンスはこのこと (エネルギー保存則) を、ある高さから出発したおもりは同じ高さまで昇るとい振り子の研究から導いたのである。これが運動エネルギーのはじめである。

デカルトに反対してライブニッツは、運動能力は (質量) × (速度の二乗) で測られると主張した。ガリレイの落下運動の法則を用いたその主張は次のとおりである。

ライプニッツの主張

質量4の物体を1の高さまで持ち上げる力＝質量1の物体を4の高さまで持ち上げる力。そこから落下運動をさせる。

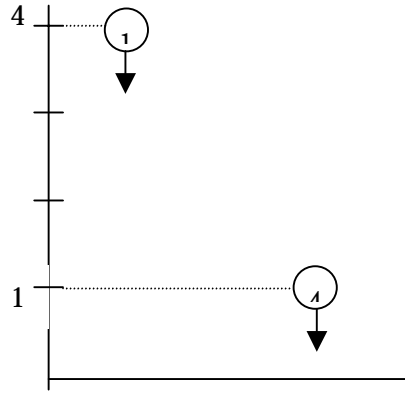
$$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g} \quad v_2 = \sqrt{2gh} = 2\sqrt{2g}$$

$$mv_1 = 4\sqrt{2g} \quad mv_2 = 2\sqrt{2g}$$

つまり1:2となり物体の持つ能力を正しく表したのではない。

そこで mv^2 という新しい量を取り入れると、

$$mv_1^2 = 8g \quad mv_2^2 = 8g \quad \text{となり保存される。}$$



これによりライプニッツは mv^2 の方が物体の持つ能力を正しく表しているとした。

※ ガリレイの落下運動の法則

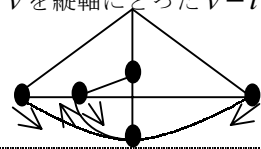
彼はまず、鉛直落下運動と斜面落下運動は同じ性質の運動であると推量し、斜面落下運動の実験をした。いま物体が斜面に沿って落ちて、ある速度を得たとするとき、その速度をもって傾きの異なった斜面の上を昇らせたとする。もし最初に落下した高さよりも高く昇ることができれば、物体をその重さによって高いところへあげる結果となる。これは、物体はそれ自身では降下する傾向のみもつという事実と矛盾するから、上の結果はありえないとした。ここから斜面上で落ちてきた速度は、単にその鉛直の高さのみに関係して、斜面の傾きには関係しない。よってこの速度は斜面の高さだけを自由に落下したときの速度に等しいことが結論される。

ガリレイはこの推量を、摩擦を避けるために振り子を用いて考えた。

振り子の玉は、これが落ち始めた高さと同じだけ、向こう側に戻ってくる。今支持点の真下の様々の適当な場所に釘をさす。すると振り子の糸はこの釘を新しい支持点として振動する。そして、振り子の玉が上昇する最後の点は、最初の落下点と同じ高さであることを確かめた。(図)

こうしてガリレイは自由落下の運動は真空中では一定の加速度を持って起こることを見出した。落下してから t 秒後の物体の速さを v とすれば、加速度は一定、すなわち $v = gt$ (g は重力加速度)という仮定から出発し、落下距離 S は、時間 t を横軸に、速さ v を縦軸にとった $v-t$ 曲線と t 軸で囲まれた面積に等しいことから

$$S = \frac{1}{2}vt \quad \text{を求め、これから} \quad S = \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{を導いた。}$$



その後どちらが正しい運動能力を表しているのかについて約40年の論争がはじまったのである。ちなみに mv^2 をエネルギーと呼んだのはヤングであり、力と距離の積を仕事と呼び、仕事と等しくするために mv^2 を $\frac{1}{2}mv^2$ と改めて今の運動エネルギーの形を確立したのはコリオリである。

どちらの量のほうが、物体の持つ能力を正しくあらわしているのだろうか？この論争は、1743年のダランベールの「力学論」の序文で決着したことになっている。「どちらでもよい」「問題にすべきではない」というのが彼の結論である。「物体がある速度で1個のばねにぶつかってそれを押し縮めたとすると、2倍の速度でははじめと同等のばねを2個ではなく4個、一気にあるいは徐々に押し縮めることができる。以上のことから活力の信奉者は物体の力は一般に質量と速度の2乗の積に比例すると結論する。」「しかし、力を障害の絶対量でなく、障害の抵抗の総和で測るなら、力を質量と速度の積とみなすことが成り立つ。」「後者のほうがより自然な測り方だが、各々好きにすればよい。」

したがって、運動量とエネルギーは障害を克服する能力を時間で考えた力積か、空間的距離で考えた仕事による尺度に関係するといつて良いだろう。

3. 運動量と運動エネルギーの関係

運動エネルギーと運動量の概念はそれぞれ別なかたちで考えだされ、エネルギー mv^2 も仕事の量との数合わせのために $\frac{1}{2}mv^2$ と改められた。この二つの物理量が式の上で微分積分の関係にあるように見えるのは単なる偶然なのだろうか？

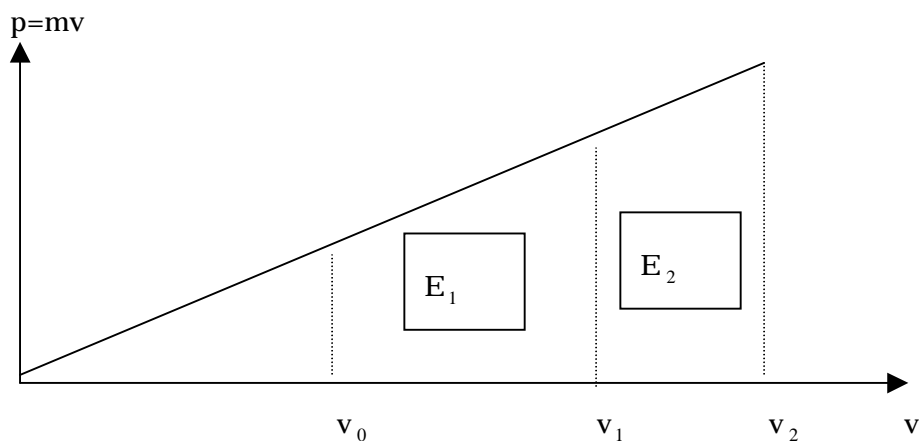
一次元で質量 m の物体を x_0 から x_1 まで動かすとき、この物体になされた仕事はどのくらいだろう。物体に加えられた力は一定でないので、ごく短い距離 dx においてなされた仕事を積分していく。

$$\int_{x_0}^{x_1} f \cdot dx = \int_{x_0}^{x_1} m \frac{d^2x}{dt^2} dx = \int_{x_0}^{x_1} m \frac{dx}{dt} d \frac{dx}{dt} = \int_{v_0}^{v_1} mv dv = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

この式から物体の運動量 mv を x_0 における速度 v_0 から x_1 における速度 v_1 まで積分すると運動エネルギーの変位になることがわかる。

4. 積分についての考察、実験

質量 m の物体について、運動量と運動エネルギーの関係をグラフで見る。
 x 軸は速さ v 、 y 軸は運動量 $p = m v$ である。



上のグラフで $E_1 = E_2$ である。上のグラフで $E_1 = E_2$ であるが $v_1 - v_0 > v_2 - v_1$ である。このことを具体的な例で示すために次のような実験をする。



斜面の上から球を静かに放すと球は斜面を滑り落ちて滑らかな水平面上を等速直線運動する。摩擦のある面の上を通過するとき $W = \mu' R x$ (μ' は動摩擦係数、 R は垂直抗力、 x は面上を玉が移動する距離)の仕事を受けて減速する。二つの面の大きさは等しいとする。

まず2つの球を斜面の上から同時にころがし、片方は滑らかな面の上を、もう一方は摩擦のある面を一度だけ通過するようにする。球が摩擦面を通過後、二秒間に進んだ距離の差を測る。

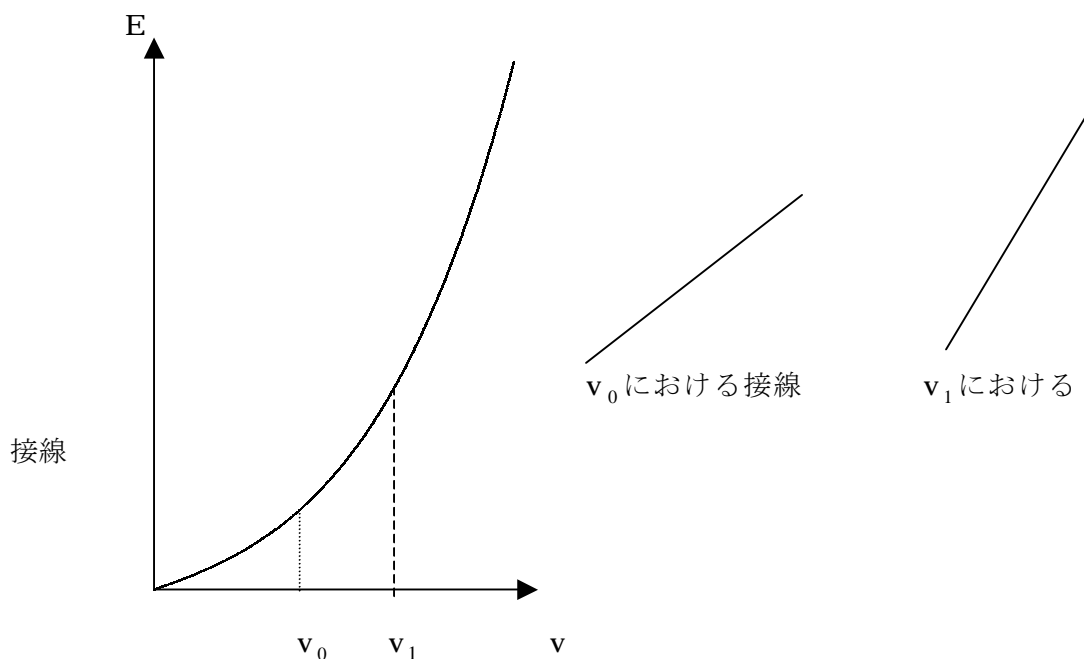
次にもう一度2つの球を斜面の上から同時にころがすが、今度は片方を摩擦のある面を一度、もう一方を二度通過するようにし、一回目と同じ条件で距離の差を測る。

測った距離の差は同じ一定の時間に進んだ距離の差であるから速度の差と等しい。二つの球の距離の差が一回目よりも二回目のほうが開いていたら、球は最初の摩擦面よりも二箇所目の摩擦面でより減速されたことになる。

5. 微分についての考察、説明

質量 m の物体について運動エネルギーと運動量の関係をグラフで見る。

今度は x 軸を速さ v 、 y 軸を運動エネルギー $E = \frac{1}{2} m v^2$ とする。



上のグラフでは運動量 $m v$ は放物線の v における接線の傾きであり、エネルギーの増加率である。例えば質量 m の物体で速さ v_0 で運動しているものと速さ v_1 で運動しているものに同じ大きさの力積をくわえ加速させるとき、速さの増加量はどちらの場合も等しいが、エネルギーの増加量は後者のほうが大きいということになる。

力積は $F \cdot t$ (F は力、 t は時間)であらわされ、エネルギーの増加量は物体にされた仕事 $F \cdot x$ (x は物体を動かした距離)と等しい。ここで x を力積が加えられている間に進んだ距離と考えると、当然速い物体を押すときのほうが押す力と押している時間が等しくても押しした距離は長くなるので仕事の量も大きくなり、エネルギーもより多く増加する。

6. まとめ

僕たちの研究の始まりの目的は「運動量と運動エネルギーが微分積分の関係にあることを実感できる実験をすること、具体的なイメージを持つこと」だった。この課題研究で運動量と運動エネルギーの成り立ちや意味、微分積分を使った運動量から運動エネルギーを導く方法、物体の運動が変わるときに2つの物理量が微分積分の関係に従ってどのように変化するかについて調べたがこれといった結論はなく、まだ当初の目的は達成されていないような気がする。

僕たちの課題研究はここで終わるが、また機会があったらこの問題について考えてみたい。

おまけ

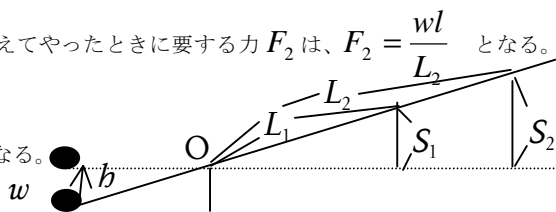
仕事の概念はなぜ(力)×(距離)なのか？

重さ w の石をてこを使って高さ h だけ持ち上げる。支点 O から石までの腕の長さを l とし、力の作用点

P までの腕の長さを L_1 とすると、石を持ち上げるのに要する力 F_1 はてこの原理より、 $F_1 = \frac{wl}{L_1}$ となる。

次に同じことを腕の長さを $L_2 (> L_1)$ に変えてやったときに要する力 F_2 は、 $F_2 = \frac{wl}{L_2}$ となる。

これらの式から $F_1 L_1 = F_2 L_2 \dots (1)$ となる。



つまり $F_1 < F_2$ となり腕の長さを長くするほど加える力は小さくなる。しかし石を h だけ持ち上げたという結果はどちらの場合も同じである。従って、石を持ち上げるという仕事に対する評価を、加えた力の大きさで行うのはおかしい。同じ結果ならば、仕事の量にも同一の値を与えるべきであろう。ところが (1) をみると、加えた力と腕の長さの積は同じ値を与える。そこでこの積でもって、石を持ち上げた仕事の量と考えるのが適当である。しかし、何らかの理由で支点が分からない場合、腕の長さが分からなくなってしまう。

ところが、それぞれの場合の作用点 P の移動距離を s_1 および s_2 とすると、明らかに $\frac{s_1}{s_2} = \frac{L_1}{L_2}$ であるので、

(1) の代わりに $F_1 s_1 = F_2 s_2$ とする。

すると、この量を仕事と定義すれば、支点の位置が分からなくても、それを評価することが可能になる。また、力を加えた本人自身の持つ知識だけで仕事の量を知ることが出来る。また、石を直接持ち上げるような場合にも仕事を測ることが出来る。よって、仕事(力)×(距離)で定義されるようになった。

単振動について

・抵抗がない場合

ばねに質量 m のおもりをつけ、時刻 t における
おもりの自然長からの変位 $x(t)$ とすると

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \dots \textcircled{1} \quad (k \text{ はばね定数})$$

この微分方程式を満たす関数 $x(t)$ を求める

$$\therefore \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x$$

この微分方程式を満たす関数 $x(t)$ を求める

①の両辺に $x'(t)$ をかけると

$$x''(t)x'(t) = -\frac{k}{m} x(t)x'(t) \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\{x(t)^2\}' = 2x(t)x'(t),$$

$$\{x'(t)^2\}' = 2x'(t)x''(t) \quad \text{であることに注意}$$

すると

$$\textcircled{2} \text{ は } \frac{1}{2} \{(x'(t))^2\}' = -\frac{k}{m} \cdot \frac{1}{2} \{(x(t))^2\}'$$

$$\therefore \{(x'(t))^2\}' = -\frac{k}{m} \{(x(t))^2\}'$$

両辺積分して

$$(x'(t))^2 - (x'(0))^2 = -\frac{k}{m} \{(x(t))^2 - (x(0))^2\} \quad (C_2 = R\sqrt{\frac{m}{k}})$$

$$\therefore (x'(t))^2 + \frac{k}{m} (x(t))^2 = (x'(0))^2 + \frac{k}{m} (x(0))^2$$

$\dots \textcircled{3}$

(この両辺に $\frac{1}{2}m$ をかけるとエネルギー保存の式になる。)

③の右辺を R^2 とおくと

t の関数 $\theta(t)$ を用いて

$$x'(t) = R \cos\{\theta(t)\} \quad \dots \textcircled{4} \quad \text{とおける}$$

$$\textcircled{4} \text{ より } \sqrt{\frac{k}{m}} x(t) = R \sin\{\theta(t)\}$$

$$\Leftrightarrow x(t) = R \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\{\theta(t)\}$$

両辺時間微分すると

$$x'(t) = R \sqrt{\frac{m}{k}} \cos\{\theta(t)\} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \frac{d\theta}{dt} = 1 \quad (\textcircled{4} \text{ より})$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \therefore \theta(t) = \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_1$$

(C_1 は定数)

$$\text{よって } x(t) = R \sqrt{\frac{m}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + C_1\right)$$

$$\therefore x(t) = C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + C_1\right)$$

以上より、 $x''(t) = -\omega^2 x(t)$ の一般解は

$$x(t) = A \sin(\omega t + B)$$

$$\therefore x(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t \quad \text{と表せる}$$

・抵抗があるとき

空気抵抗 $-lv$ とすると

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - l \frac{dx}{dt}$$

$$\therefore \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x - \frac{l}{m} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{k}{m} = K, \quad \frac{l}{m} = L \quad \text{とし}$$

$$x''(t) = -Lx'(t) - Kx(t) \quad \text{と書くと}$$

$$x''(t) + Lx'(t) + Kx(t) = 0 \quad \dots \textcircled{5}$$

この方程式の特性方程式

$$\lambda^2 + L\lambda + K = 0 \quad \dots \textcircled{6} \quad \text{の解 } \alpha, \beta \text{ とおく}$$

(i) $L^2 - 4K > 0$ のとき

α, β が⑥の異なる2実数解になるときで

$$x(t) = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t}$$

$L > 0, M > 0$ だから

α, β が実数の場合は解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = -L < 0, \quad \alpha\beta = M > 0$$

よって α, β は共に負となり、

$y = x(t)$ のグラフは右のようになる

(ii) $L^2 - 4k = 0$ のとき

$\alpha = \beta$ のときで、

$$x(t) = (C_1 t + C_2) e^{\alpha t}$$

よって $y = x(t)$ のグラフは右のようになる

(iii) $L^2 - 4K < 0$ のとき

α, β は互いに共役な虚数となる

$$\alpha = a + bi, \beta = a - bi \quad \text{とおくと、}$$

$$L = -2a, M = a^2 + b^2$$

$$\textcircled{3} \text{は } x''(t) - 2ax'(t) + a^2 + (a^2 + b^2)x(t) = 0$$

両辺に e^{-at} をかけて

$$e^{-at} x''(t) - 2ae^{-at} x'(t) + a^2 e^{-at} x(t) = -b^2 e^{-at} x(t)$$

$$\Leftrightarrow e^{-at} x''(t) - 2(e^{-at})' x'(t) + (e^{-at})'' x(t) = -b^2 e^{-at} x(t)$$

$$\Leftrightarrow \{e^{-at} x(t)\}'' = -b^2 (e^{-at} x(t))$$

となり、 $z = e^{-at} x(t)$ とおくと $z''(t) = -b^2 z(t)$ となる

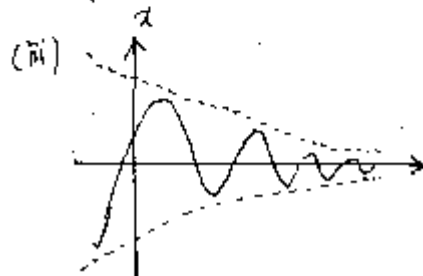
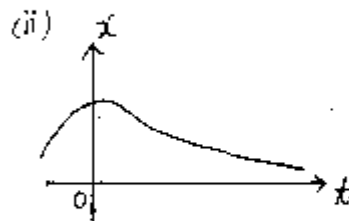
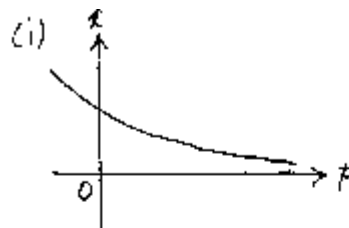
$x(t) = A \sin(\omega t + B)$ から $z(t)$ は

$z(t) = C_1 \sin(bt + C_2)$ となり、ここから

$$e^{-at} x(t) = C_1 \sin(bt + C_2)$$

$$\therefore x(t) = C_1 e^{at} \sin(bt + C_2) \quad \text{となる}$$

$2a = -L < 0$ より、 a が負であることに注意して
 $y = x(t)$ のグラフをかくと右のようになる



波動について

山崎尋紀 山崎高幸 植田浩一郎 三浦正史 堀内義文

<はじめに>

波動は物体とは違い、波を衝突させても衝突後は元の形のまま進んでいく。これは波の独立性と重ね合わせの原理で説明でき、波動特有の現象である。我々は、波の現象の中で波の干渉と代表的な波動である音波の性質について調べてみた。

I 波の干渉

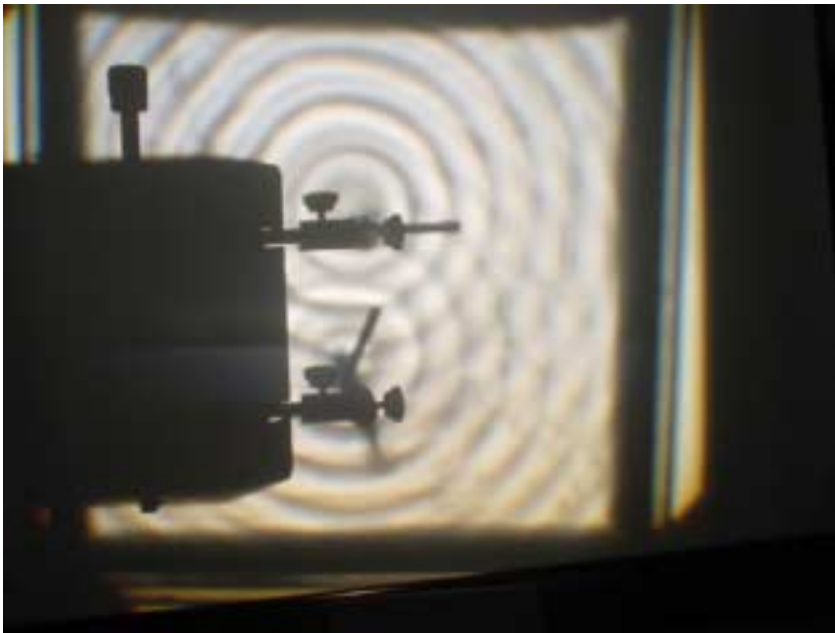
<はじめに>

同じ音が出ているスピーカーを2つ少し離して並べて音を聞くと、音源からの距離に差がないのに聞く場所によって聞こえる音の大きさが異なるという現象が起きる。これは音が音波という波の一種であることと関係し、波の干渉とよばれる現象による。しかし音は目に見えず何が起きているかわからないので、同じく波の一種である水波を用いて調べてみることにした。

<水波投影機を用いた波の干渉の様子を観察>

水波投影機を用いて振幅、周期、波長の等しい2つの波を位相差を変えて干渉させた。以下の図がその時の干渉の様子である。

(図1) 位相差0のときの干渉の様子



実線：振幅最大
点線：振幅ほぼ0

(図2) 位相差 $\pi/2$ のときの干渉の様子



実線：振幅最大
点線：振幅ほぼ0

(図3) 位相差 π のときの干渉の様子



実線：振幅最大
点線：振幅ほぼ0

<わかったこと>

位相のみが異なる波を干渉させると常に振幅が最大の部分と常に振幅が0の部分ができる
また位相差が異なると干渉の様子も異なってくるのが分かる。
その理由について以下に示す。

<位相のみが異なる時の波の干渉について>

振幅 A 、周期 T 、波長 λ 、初期位相 θ_1 の波の時間 t 、波源からの距離 r_1 での変位を y_1
振幅 A 、周期 T 、波長 λ 、初期位相 θ_2 の波の時間 t 、波源からの距離 r_2 での変位を y_2
とおくと、干渉させたときの合成波の変位 y は重ね合わせの原理より

$y = y_1 + y_2 = A \sin[2\pi(t/T - r_1/\lambda) + \theta_1] + A \sin[2\pi(t/T - r_2/\lambda) + \theta_2]$ と表せ、
和と差の積の公式を用いると以下のようなになる

$$y = 2A \sin[2\pi t/T - \pi(r_1 + r_2)/\lambda + (\theta_1 + \theta_2)/2] \cos\{\pi(r_2 - r_1)/\lambda + (\theta_1 - \theta_2)/2\}$$

t を変数とし、ある地点 r_1 、 r_2 における波の上下動の様子について考える

ここでは $|2A \cos\{\pi(r_2 - r_1)/\lambda + (\theta_1 - \theta_2)/2\}|$ が振幅となり、

$r_2 - r_1$ の値によって振幅が決まるのでその双曲線上では振幅が等しい

特に $\pi(r_2 - r_1)/\lambda + (\theta_1 - \theta_2)/2 = \pi/2 + \pi \times m$ (m は整数) となる点では

$|2A \cos\{\pi(r_2 - r_1)/\lambda + (\theta_1 - \theta_2)/2\}|$ が 0 となるので

$$y = 2A \cos\{\pi(r_2 - r_1)/\lambda + (\theta_1 - \theta_2)/2\} \sin[2\pi t/T - \pi(r_1 + r_2)/\lambda + (\theta_1 + \theta_2)/2] = 0$$

つまり $r_2 - r_1 = (m + 1/2)\lambda + (\theta_2 - \theta_1)\lambda/2\pi$ となる点では常に波はおきない

また $\pi(r_2 - r_1)/\lambda + (\theta_1 - \theta_2)/2 = \pi \times m$ (m は整数) となる点では

$|2A \cos\{\pi(r_2 - r_1)/\lambda + (\theta_1 - \theta_2)/2\}|$ が最大値 $2A$ となり

$$y = 2A \sin[2\pi t/T - \pi(r_1 + r_2)/\lambda + (\theta_1 + \theta_2)/2] \text{ となるので}$$

$r_2 - r_1 = m\lambda + (\theta_2 - \theta_1)\lambda/2\pi$ となる点では波は最も強め合う

ここまでは位相差のみについてみてきたが、波には他にもさまざまな要素がある
それらを変化させたときについても調べてみた

<振幅のみが異なる場合>

振幅 A_1 、周期 T 、波長 λ 、初期位相 0 の波の時間 t 、波源からの距離 r_1 での変位を y_1

振幅 A_2 、周期 T 、波長 λ 、初期位相 0 の波の時間 t 、波源からの距離 r_2 での変位を y_2

とおくと、干渉させたときの合成波の変位 y は重ね合わせの原理より

$$y = y_1 + y_2 = A_1 \sin[2\pi(t/T - r_1/\lambda)] + A_2 \sin[2\pi(t/T - r_2/\lambda)] \text{ と表せ}$$

加法定理を用いて展開してまとめると

$$y = (A_1 \cos 2\pi r_1/\lambda + A_2 \cos 2\pi r_2/\lambda) \sin 2\pi t/T - (A_1 \sin 2\pi r_1/\lambda + A_2 \sin 2\pi r_2/\lambda) \cos 2\pi t/T$$

ここで $A^2 = (A_1 \cos 2\pi r_1/\lambda + A_2 \cos 2\pi r_2/\lambda)^2 + (A_1 \sin 2\pi r_1/\lambda + A_2 \sin 2\pi r_2/\lambda)^2$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos 2\pi(r_1 - r_2)/\lambda \text{ とすると}$$

$$y = A \cos \alpha \sin 2\pi t/T - A \sin \alpha \cos 2\pi t/T \text{ となり}$$

合成して $y = A \sin(2\pi t/T - \alpha)$ となる

よって振幅 A は $r_1 - r_2$ の値によって決まり、その双曲線上では振幅が等しい

特に、 $r_1 - r_2 = m\lambda$ (m は整数) となる時、振幅は最大値 $A_1 + A_2$ をとり、

$r_1 - r_2 = (m + 1/2)\lambda$ (mは整数) となる時、最小値 $|A_1 - A_2|$ をとる

<周期のみが異なる場合>

振幅 A 、周期 T_1 、波長 λ 、初期位相 θ の波の時間 t 、波源からの距離 r_1 での変位を y_1

振幅 A 、周期 T_2 、波長 λ 、初期位相 θ の波の時間 t 、波源からの距離 r_2 での変位を y_2

とおくと、干渉させたときの合成波の変位 y は重ね合わせの原理より

$y = y_1 + y_2 = A \sin[2\pi(t/T_1 - r_1/\lambda) + \theta] + A \sin[2\pi(t/T_2 - r_2/\lambda) + \theta]$ と表せ、

和と差の積の公式を用いるとこうなります

$$y = 2A \sin[\pi\{t(1/T_1 + 1/T_2) - (r_1 + r_2)/\lambda\} + \theta] \cos[\pi\{t(1/T_1 - 1/T_2) - (r_1 - r_2)/\lambda\}]$$

t を変数とし、ある地点 r_1 、 r_2 における波の上下動の様子について考えると、

式から振幅が一定となる点は存在せず、周期が異なる2波の干渉は非常に乱れるとわかる

<波長のみが異なる場合>

振幅 A 、周期 T 、波長 λ_1 、初期位相 θ の波の時間 t 、波源からの距離 r_1 での変位を y_1

振幅 A 、周期 T 、波長 λ_2 、初期位相 θ の波の時間 t 、波源からの距離 r_2 での変位を y_2

とおくと、干渉させたときの合成波の変位 y は重ね合わせの原理より

$y = y_1 + y_2 = A \sin[2\pi(t/T - r_1/\lambda_1) + \theta] + A \sin[2\pi(t/T - r_2/\lambda_2) + \theta]$ と表せ、

和と差の積の公式を用いるとこうなります

$$y = 2A \cos\{\pi(r_2/\lambda_2 - r_1/\lambda_1)\} \sin[\pi\{2t/T - (r_2/\lambda_2 + r_1/\lambda_1)\} + \theta]$$

t を変数とし、ある地点 r_1 、 r_2 における波の上下動の様子について考える

この波の振幅は $r_2/\lambda_2 - r_1/\lambda_1$ の値によって決まる

特に、 $r_2/\lambda_2 - r_1/\lambda_1 = m$ (mは整数) の時、振幅は $2A$ で最大

$r_2/\lambda_2 - r_1/\lambda_1 = m + 1/2$ (mは整数) の時、振幅は 0 で最小となる

特に $m = 0$ の時、 $r_2/\lambda_2 - r_1/\lambda_1 = 0$ となる点では振幅は最大値 $2A$ となるが、

この点の集合はアポロニウスの円となる

<まとめ>

最初は位相差のみで単純だったが、周期や波長が異なると、とても複雑になると分かって面白かった。今回は実験装置が無く、実際に実験ができなかったので、今度、周期や波長が異なる場合について実際に実験してみたいと思う。また、変化させる要素を組み合わせるときにどのように波が乱れるかも調べてみたいと思う。

音の決定要素は何か

<はじめに>

身近な波動の代表的なものとして音波や光波があります。ここでは音について調べてみたいと思います。音には声、楽器、騒音、雑音などさまざまですがそれらを構成するものはいったい何か。また音の性質の違いは何に影響されるのでしょうか。

音の三要素は高さ（振動数）、大きさ（振幅）、そして音色です。振動数、振幅については前述した法則通りなので固有の音を作る音色、つまり波形について調べます。また、波の干渉を音にも応用し、オシロスコープのデータを元にして、2個以上の正弦波を重ね合わせてそれぞれの音色に近いものを作り出せないかと考えました。

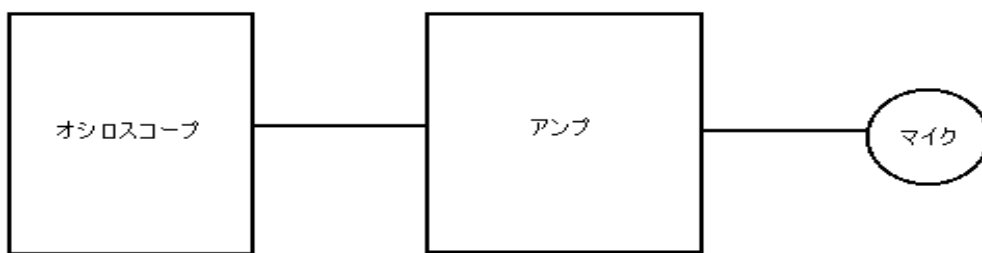
<理論>

倍音の考え方

管楽器で管の中の一端で空気振動を起こすと音速で多端まで振動が伝わり反射して戻ってきます。この行きと帰りの空気振動が干渉し合って定常波を作り、腹と節ができます。管の両端が開いていた場合両端が腹、中央が節となります。これを開管といいます。また、どちらか一方が閉じていた場合閉端では空気が振動できないので必然的に節となり、開端が腹になります。これを閉管といいます。基音による空気振動回数の整数倍の音を倍音といいます。開管は腹から始まり腹で終わるので整数倍音を出すことができますが、閉管は節から始まり腹で終わるので偶数倍音を出せず奇数倍音しか出せません。

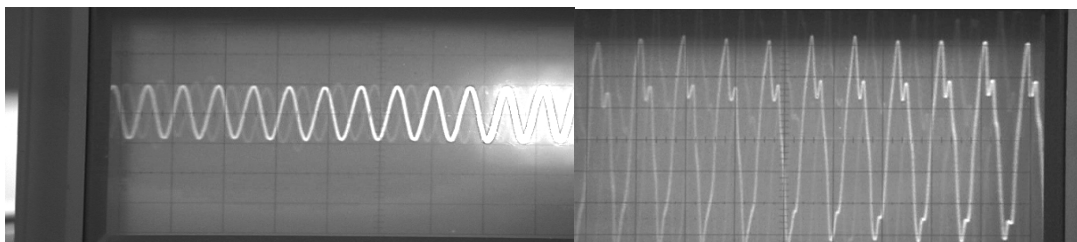
<実験>

振動を電気信号に変え、アンプを使用して増幅し、振幅を見やすい大きさにしてオシロスコープで観察する。マイクを使い直接音を拾う。なるべく雑音が入らないようにして安定し見やすい波形を撮るように工夫した。



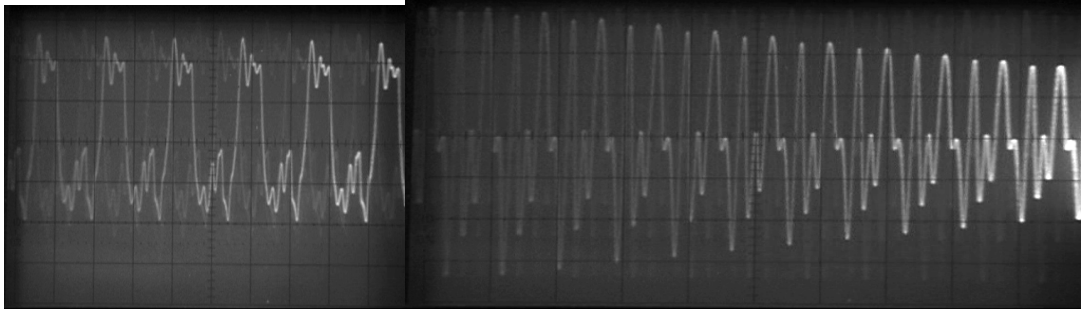
<結果>

(オシロスコープの波形)



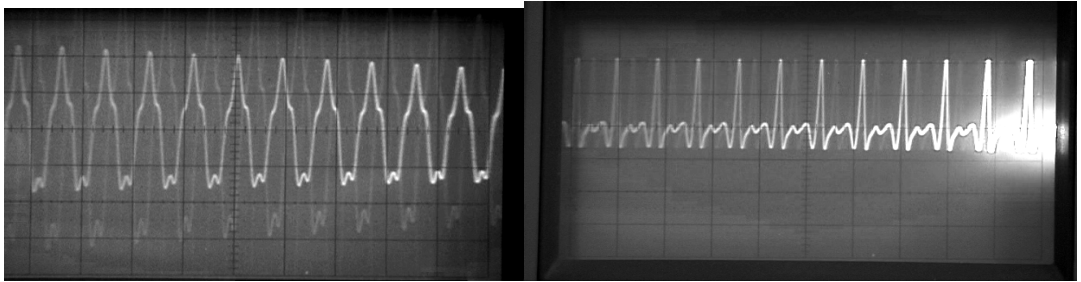
おんさ（正弦波）

ピアノ



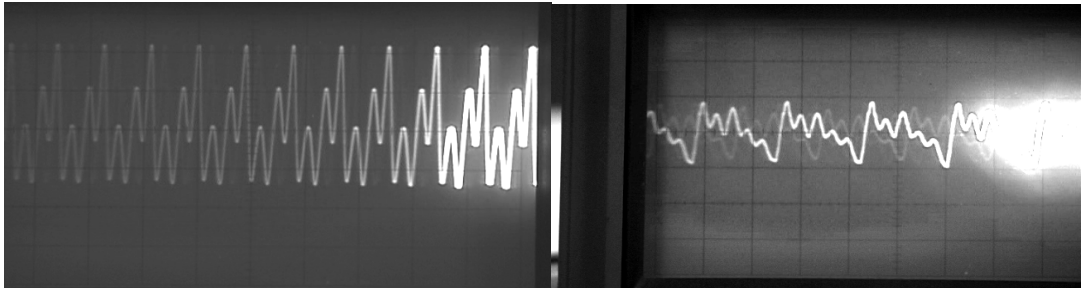
ギター

バイオリン



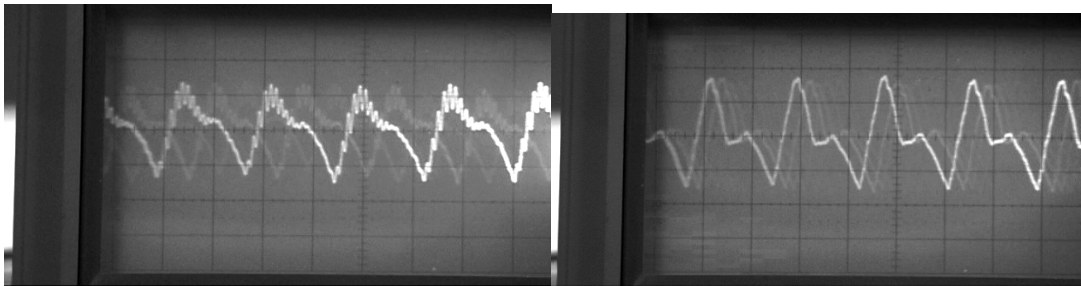
マリンバ

トランペット



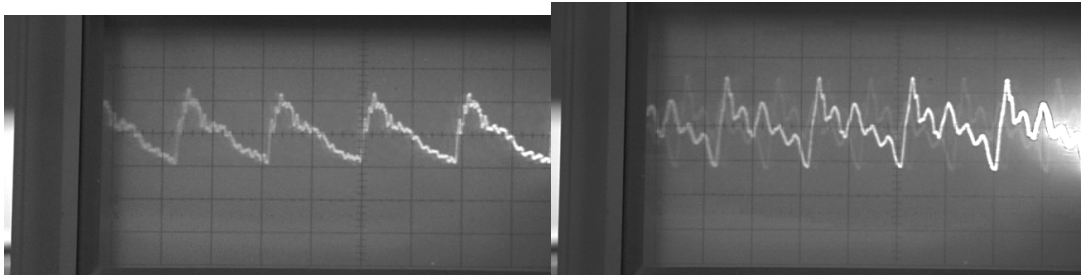
クラリネット

声 (あ)



声 (い)

声 (う)



声 (え)

声 (お)

<分析>

①波形を見てわかること

- ・ ピアノ、マリンバは正弦波に近い。 ・ ギターは短い振動と長い振動を繰り返す。
- ・ バイオリンは比較的きれいな波形である。
- ・ トランペットは穏やかな小さい波が2回と大きく鋭い波が1回の連続である。
- ・ クラリネットは正弦波が規則正しく3段階に分かれたきれいな波形である。
- ・ 声は「あ」と「お」が酷似している
- ・ 「い」「う」「え」が似ているが「い」と「え」が特に類似し細かい振動もある。
- ・ 「う」は非常に単純できれいな振動である
- ・ 声は全体的に三角波やノコギリ波に近い形を形成している。

②全体から推測できること

- ・ 大きく2種類のパターンに分類できる

ほとんど全体としての振動が音を決定する振動。

大きな基本振動の中にさらに小さな振動がある。

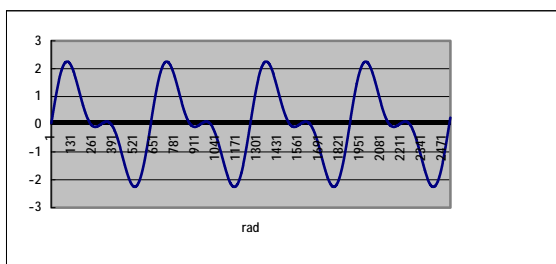
- ・ 管楽器なら管楽器、弦楽器なら弦楽器で似たような音がでるので基本の音は同じでそこから分かれてさらに細かく特有の振動を作る
- ・ 声に関しても口のあけ方や口の中の形によって似ている音や複雑な音の出るものがある

<基本波形の組み合わせで音色が作れるか検証してみた>

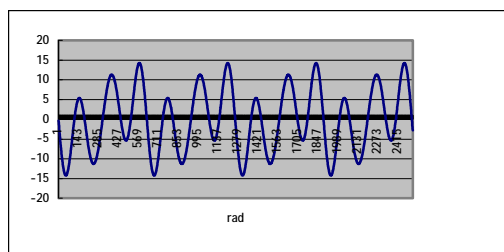
<方法>

正弦波の振幅振動数を変化させたものを加えて出来る波形の特徴を分析しながらそれによって少しずつ形を修正していきどこまで近いものが出来るかやってみる

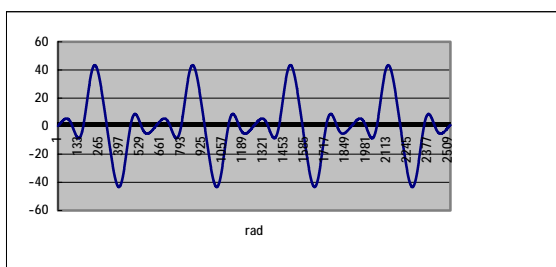
結果



「う」の音



クラリネット



トランペット

<トランペットについて>

整数倍振動でないと作れませんでした。よってトランペットは開管であるということがわかります。

<クラリネットについて>

奇数倍振動と1部偶数倍振動を入れて作ることが出来ました。よってクラリネットは閉管である事がわかります。

<考察>

振動の微妙な部分は別としてだいぶ本物に近い形を作ることが出来ました。これを応用していけばどんなに細かくて複雑な振動の波形でもいろいろな正弦波を限りなく加えていくことで同じものを作り出せるのではないかと思います。

<まとめ>

波の干渉を音にも応用し、オシロスコープのデータを元にして、2個以上の正弦波を干渉させてそれぞれの音色に近いものを作り出せました。よってこれを応用すれば、限りなく正弦波を加えていくことでどんな複雑な波形も造ることが出来るのではないかと考えました。

<調べてみてわかったこと>

- ・実際にはクラリネットは閉管ですが、弱いと4倍振動が出てしまうようです。
- ・逆にどんな波形でも複数の正弦波の和に分解でき、そうすることをフーリエ変換と言います。つまり波形を f とすると

$f(t)=A_1\sin(\omega t)+A_2\sin(2\omega t)+A_3\sin(3\omega t)+\dots$ で表せます。

<今後の課題>

特有の音が波形によって決まり、またそれはいくつもの基本波の重ね合わせで同じ音が出来るということがわかりましたが、光についてやほかの波の特徴については条件や時間の関係で調べませんでした。また、実際にはこのような理論がどこに生かされているのか、またそれはどのような仕組みになっているのかなど、波動という世界はもっと広がりがあります。音についてももっと詳しく調べればまだまだ発見できることがありそうです。もしこれからも機会があれば研究していきたいと思います。

アゾ染料と有機化学合成

理数科課題研究化学班 酒井先生チーム

浅林 庵 中川 深瀬 舟坂

始めに

有機物は人間が加熱、還元、ニトロ化、スルホン化などの操作を加えることで様々な物質を人為的に作ることができることがよく知られています。それにより、自然界では大量に確保できない物質と同等の性質を持つ物質を、工業的に大量に生産できるようになりました。特に平面性六角形の構造を持つベンゼンは、それぞれの頂点にある炭素原子から伸びている水素原子を他の原子や基で置換することで、非常に多種多様な物質を、ベンゼンというたった一つの物質を基本にして作ることができます。そのような変化の多様性に興味を感じ、その中でも基本的とされている化学染料の合成を先生の勧めもあり、理数科の課題研究の題材とすることにしました。

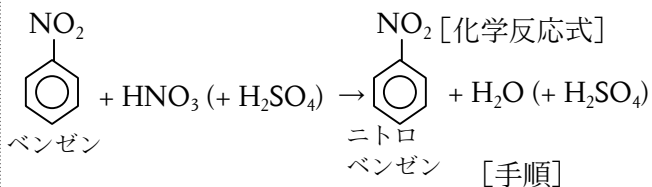
全体の手順と操作

合成といっても、大抵の場合は目的の物質は一回の反応だけでは作れません。今回も大まかに言って以下のような4つの過程を経て、やっと染料を得ることが出来ます。

- 過程 1: ベンゼンを混酸でニトロ化してニトロベンゼンを得る。
- 過程 2: ニトロベンゼンをスズと塩酸で還元してアニリンを得る
- 過程 3: アニリンを濃硫酸でスルホン化してスルファニル酸を得る
- 過程 4: スルファニル酸を塩酸でジアゾ化し、 α -ナフトールや β -ナフトールとカップリングさせてそれぞれオレンジ I、オレンジ II を得る。

※実際は上の操作に加えて「精製」の操作をする必要があったり、中間物質を挟んでいたりするのですが、それは次項以降の説明で書いていきます。ちなみに「精製」の手順を甘く見ていると「失敗」してしまったり、得られる物質が極端に少なかったりすることがあります。

過程 1: ベンゼンからニトロベンゼンへ



- ① 濃硫酸 (120cc) に濃硝酸 (100cc) を混ぜる。
(混ぜたものを混酸という)
- ② 混酸にベンゼン (90cc) を少しずつ加える。(発熱するため)
- ③ 60°C の湯浴で 30 分温める。【図 1】
- ④ 分液ろうとに移しニトロベンゼンと混酸に分離する。【図 2】
- ⑤ 水を加えてよく振る。(水洗するという) 【図 3】
- ⑥ 炭酸ナトリウム (発泡の様子を見ながら適量) を加えて水洗する。(酸性を中和する)
- ⑦ 200°C 近くの高温で蒸留し、【図 4】純度の高いニトロベンゼンを得る。

試薬一覧

- ・ ベンゼン 78 g
- ・ 濃硫酸 120cc
- ・ 濃硝酸 100cc
- ・ 炭酸ナトリウム
- ・ 食塩

図 1

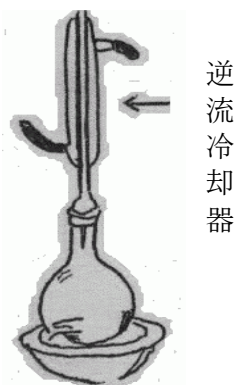


図 2



図 3

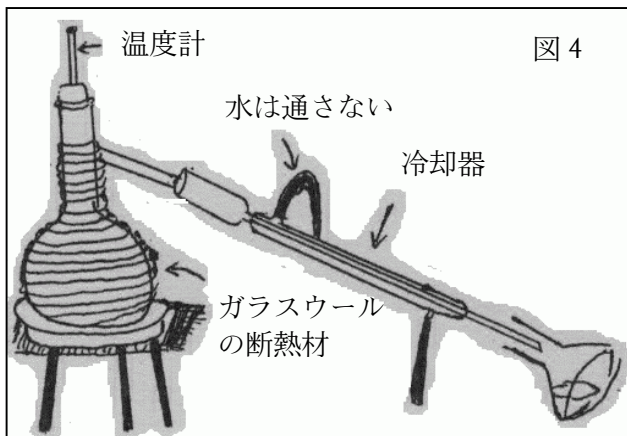
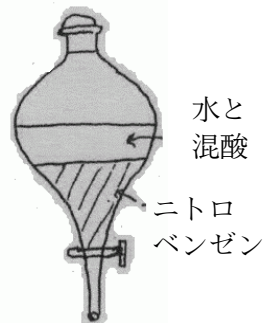


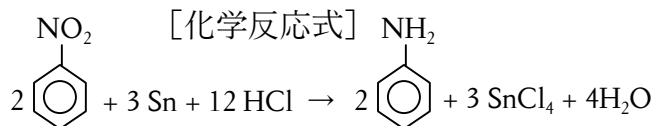
図 4

[結果]

ニトロベンゼン 68.5 g (収率 57%)

(理論値から 43% も低いのは、水洗の操作のし過ぎが主な原因だと思われる。)

過程 2: ニトロベンゼンからアニリンへ

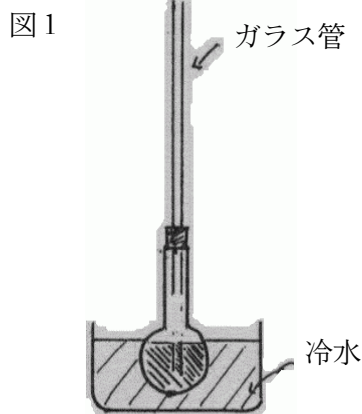
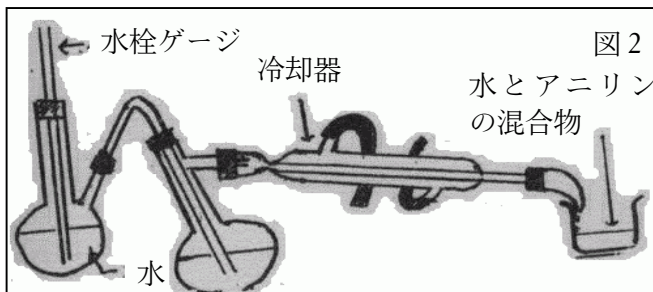


[手順]

- ① ニトロベンゼン (61.5 g) に濃塩酸 (270cc) を少しずつ加える。(激しく発熱する可能性があるため)【図1】
- ② 1時間湯浴する。
- ③ 水 (100cc) と水酸化ナトリウム水溶液 (350 g) (質量パーセント濃度 42.8%) を加える。
- ④ 水蒸気蒸留により 100°C 近くの低温でアニリンを蒸留する【図2】

試薬一覧

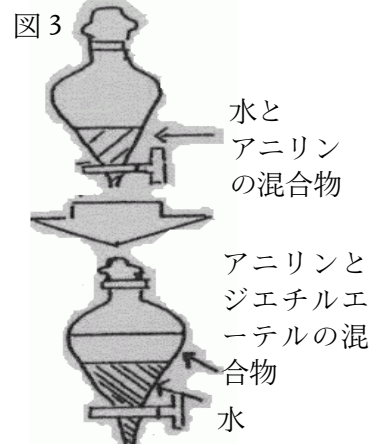
ニトロベンゼン 61.5 g
 スズ 120 g
 濃塩酸 270cc
 水酸化ナトリウム 150 g
 食塩 36 g



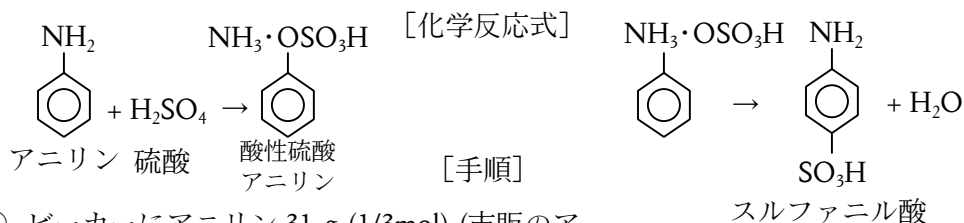
- ⑤ アニリンと水 (180ml) に食塩 (36 g) を加える。(アニリンは食塩水にはより溶けにくいいため、水とアニリンを分離できる。)
- ⑥ ジエチルエーテルを加える【図3】
- ⑦ ジエチルエーテルを沸騰させるとアニリンを得られる。(ジエチルエーテルの沸点が 34°C と低いので容易に蒸発させることができる。)

[結果]

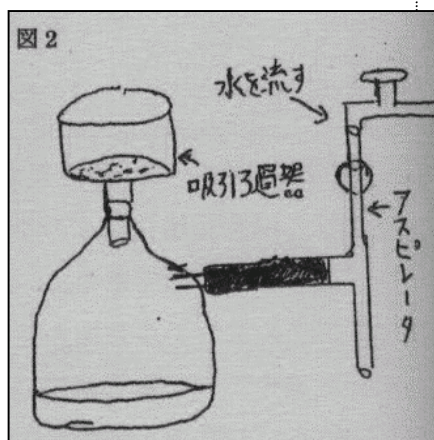
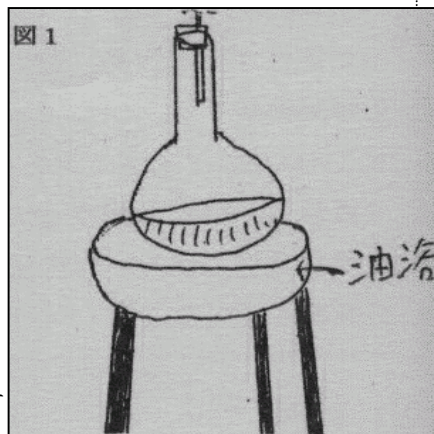
アニリン 2.77 g (収率 ベンゼンから 8.94%、
 得られたニトロベンゼンから 15.7%)
 (水蒸気蒸留や塩析、エーテル抽出等、精製過程が多いので収率が低くなったと思われる。)



過程 3: アニリンからスルファニル酸へ



- ① ビーカーにアニリン 31 g (1/3mol) (市販のアニリンを使用) をとり、かきまぜながら、濃硫酸を約 100cc を少しずつ加える。すると非常に激しい反応が起こり、結晶性の酸性硫酸アニリンの白色塊ができる。(1/3 の量で反応は終わるが残りを加える。)
- ② できた溶液を油浴に浸し、190°C に保って約 3 時間 30 分加熱する。【図1】
- ③ 熱し終わったら、冷水にかき混ぜながら加える。すると、スルファニル酸の白色塊が析出する。
- ④ 液が冷えてからろ過する。ろ過するとろ紙に紫色の粉末が残る。
- ⑤ ろ過した粉末を熱湯に溶かして、活性炭を入れ、脱色し、熱いうちに吸引ろ過する。すると、真っ白できれいな結晶が沈殿する。【図2】
- ⑥ それをろ過し、105°C で乾燥させる。

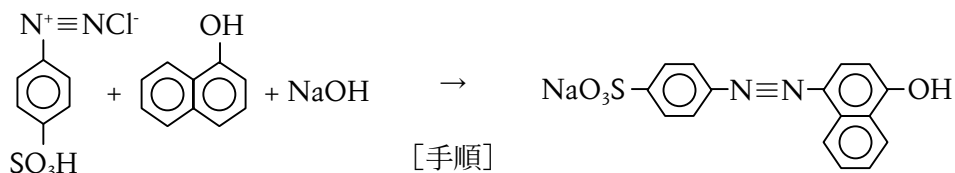
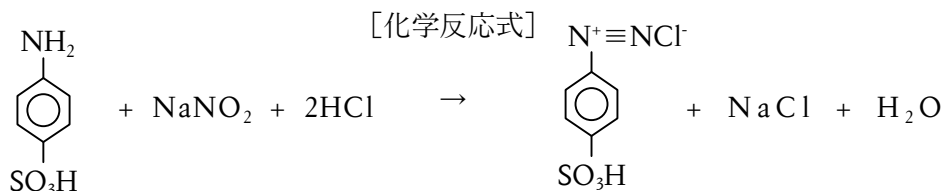


[結果]

スルファニル酸 19.695 g (収率 34.1%)

(硫酸との反応で急な発熱のため突沸して、途中の液体のうち半分を失ったために 30% という低い収率になったと思われる)

過程 4:スルファニル酸から染料へ



- ① スルファニル酸 8.4 g、炭酸ナトリウム 3 g をビーカーにとり、水 100cc を加えて溶かす。
- ② 濃硫酸 15cc を加え、氷のかけらを入れ、10°C に冷やす。
- ③ 別に亜硝酸ナトリウム 3.5 g を水 20~30°C に溶かし、②の溶液によくかきまぜながら、加える。この際、沈殿ができるが、かまわずよくかきまぜる。
- ④ 別のビーカーにα-ナフトール 7.2 g、水酸化ナトリウム 2.5g、炭酸ナトリウム 13 g をとり、水 100cc を加えて溶かし、氷のかけらを入れて、10°C まで冷やす。
- ⑤ ④に③を加えて、よくかきまぜる。
- ⑥ ⑤を 80°C に温めて食塩 50 g ほどを少しずつ加える。このとき、染料はコロイド溶液のため塩析され、沈殿する。
- ⑦ 液が冷えたら「ろ過」し、乾燥させ、粉末にする。

使用薬品

α-ナフトール 7.2 g
 スルファニル酸 8.4 g
 亜硝酸ナトリウム 3.5 g
 濃硫酸 15cc
 水酸化ナトリウム 2.5 g
 無水炭酸ナトリウム 16 g
 塩化ナトリウム 50 g

(※ α-ナフトールを β-ナフトールに変えても手順、必要な物質量は同じ。)

[結果]

α ナフトールから得られたオレンジ I : 33.285 g

β ナフトールから得られたオレンジ II : 45.124 g

(実験中に加わった水分や、食塩を含んでいるためか、理論値を越える数字となっていました)

結果と考察

ベンゼンからニトロベンゼンの合成実験や、ニトロベンゼンからアニリンを合成する実験では、精製過程における『水洗』や『エーテル抽出』や『水蒸気蒸留』などの操作の方法やコツを十分に理解していなかったのが、無駄に『収率』を落としてしまいました。しかし、最終的には反応通りの物質は得られたので、課題研究の目的のひとつである『有機化学合成の操作の理解』については達成されたと思います。

アニリンからスルファニル酸を合成する実験では、見た目にも成功だとはっきり言えるほど美しい結晶を得られました。『ベンゼンからアニリンを合成する実験』での反省を生かすことができよかったです。

『オレンジⅠ』『オレンジⅡ』を合成する実験が一番おもしろかったです。特にカップリングの際に溶液同士が触れ合ったところから急に鮮やかな色になっていく様子が見ものです。

どの実験についても、初めての経験で大小いろいろな失敗もしたけれど、逆に失敗することで試薬や反応の特徴などを知り、操作上の留意点を考えることができたので、その点では自分たちの実験は意味深いものだったと思います。

終わりに

現在、有機化学合成によって生成した物は、非常に多岐にわたる分野で幅広く使われています。今回作った染料にしても、絹や羊毛などの動物繊維の染色だけでなく、驚いたことにオレンジジュースの色をつけるのにも利用されているそうです。

そのように多くの分野で有機化学合成は役立っているのですが、今回の実験でさえも自分達が数多くの失敗をしてきたことを考えても、有機化学合成、特にベンゼンを基本にした合成を発見し、そこからさらに多くのものを作り出す反応を見つけ出して来た先人達の努力と才能には、敬意を表すばかりです。

そして自分達自身で、彼らの足跡を学びながら、自ら考えて、新しい発見の連鎖の担い手になっていくべきだと思いました。

Chem 3Dを用いた化学反応の研究

化学 第2班 有沢早葵子 小柳沙綾歌
高柳加奈子 田中亜有実
森 優希

1. 初めに

分子や原子といった小さな世界では、私たちの普段の生活で使われている古典力学が成り立たず、別の力学体系である量子力学を基に考えます。古典力学では、 $\mathbf{ma}=\mathbf{F}$ (ニュートン運動方程式) がなりたちますが、原子・分子さらに電子といった粒子は非常に小さく、運動を測定したとしても、観測前後で状態が変化してしまうので、測定結果は確率でしか表すことができません。原子分子の世界におけるニュートン運動方程式に相当するものが、シュレディンガーの波動方程式 ($\mathbf{H}\Psi = \epsilon \Psi$) です。ここで、 \mathbf{H} はハミルトニアン演算子、 Ψ は粒子 (もっぱら電子) の波動関数、 ϵ は粒子のエネルギーを意味します。電子の存在確率は $\int \phi \phi^* d\tau$ 、電子のエネルギーは $\int \phi \mathbf{H} \phi^* d\tau$ で求めることができます。

シュレディンガーの波動方程式は、普通解くのが難しいのですが、最も簡単な例がハミルトニアンのポテンシャルが井戸型ポテンシャルの場合です。これは高校程度の微分積分の知識があれば、解くことができます。

例 井戸型ポテンシャル

波動方程式の項で説明した理論の最も簡単な適用例は、一次元の箱の中の自由粒子の問題である。一次元というのは、この粒子の運動方向が一定方向に限定されていて、 x 軸に沿ったある範囲、例えば、 $0 < x < a$ (a : 定数) 以外では、ポテンシャルが無限大になり、粒子がこの箱のそとにでられなくなることを意味します。なお、 $0 < x < a$ の中ではポテンシャルが一定なので (自由粒子なので力が働かず、これはポテンシャル一定と同じことである) これを 0 にとる。粒子の質量を m とすれば、ハミルトン関数 \mathbf{H} は

$$\mathbf{H} = \left(\frac{1}{2m} \right) p_x^2 \text{ となるので、このなかの } p_x \rightarrow \left(\frac{h}{2\pi i} \right) \left(\frac{d}{dx} \right) \text{ とおき変えれば、ハミルト}$$

ニアン \mathbf{H} が、

$$\mathbf{H} = - \left(\frac{h^2}{8\pi^2 m} \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} \right) \text{ となり、時間に依存しないシュレディンガー方程式}$$

$$- \left(\frac{h^2}{8\pi^2 m} \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} \right) \psi(x) = E \psi(x) \text{ がえられます。}$$

この微分方程式の一般解は

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx \text{ です。}$$

これを、境界条件 $x=0$, $x=a$ において、 $\psi(x)=0$ および規格化条件に照らし合わせて解くと、井戸型ポテンシャルにおける電子の波動関数とそれに対応するエネルギーが得られます。

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}\right)x \quad n = 1, 2, 3, 4 \dots$$

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8ma^2}$$

一般的な分子では波動関数はなかなか解くことができませんが、現在ではかなり高い精度でコンピュータが計算を行ってくれます。このような計算を行うソフトとして、今回は Chem 3D を用いました。このソフトは、分子の構造解析のシミュレーション用に開発されたものです。私たちはこのソフトを使って、遷移状態を仮定して反応がどう進むかを調べました。

2. 基本的な考え方

化学反応は分子同士が衝突したり、または熱運動によって分子構造が変形することがきっかけで起こるといわれています。そこで、本研究では、パソコン上で分子を衝突させたり、分子を変形させることによって遷移状態を想定し、反応がどのように起こるかをシミュレーションしてみました。

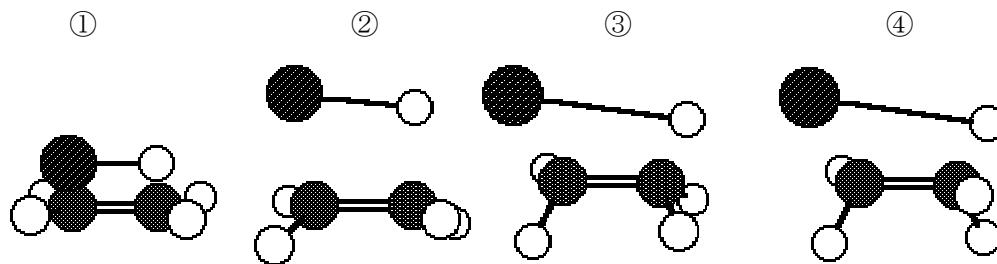
そのときの条件としては、反応はエネルギーが小さくなる方向に進むので、パソコン上でエネルギーを最小化して変化を見ました。使用したソフトはエネルギーを最小化していく途中の各過程で、原子の位置を表示でき、それが実際の位置変化に対応すると考え、反応機構のシミュレーションとしました。本研究の反応として、エチレンの付加反応を調べました。

3. エチレンの付加反応の反応機構

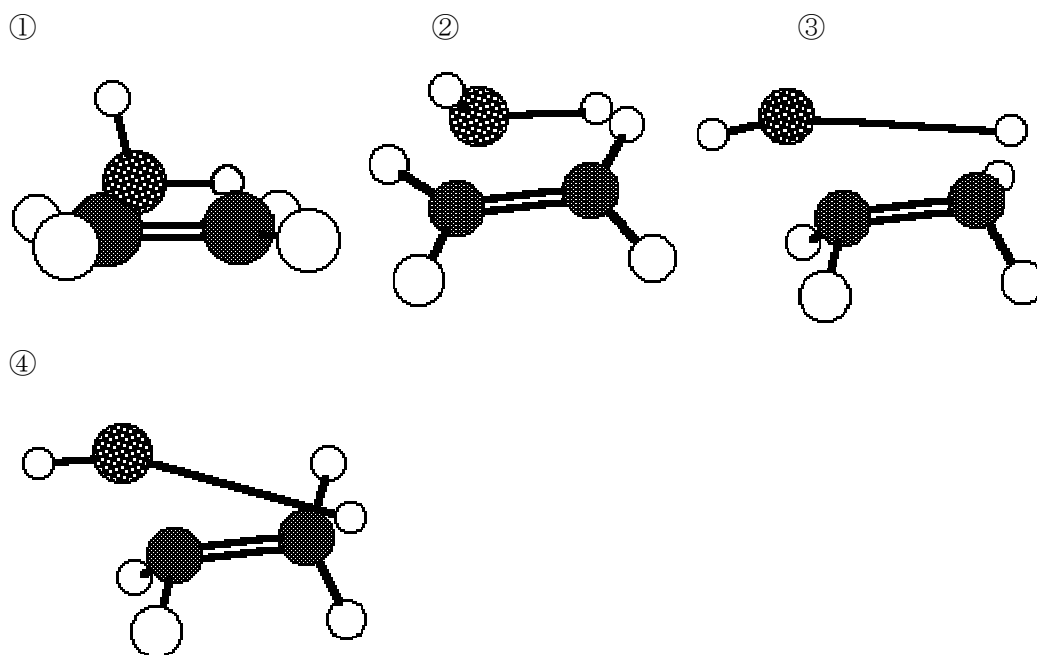
エチレン ($\text{CH}_2=\text{CH}_2$) の二重結合は反応性に富み、ハロゲン分子やハロゲン化水素などと反応して、これらが二重結合に付け加わった化合物が生成します。また、白金やニッケルといった触媒を用いると、二重結合は水素分子とも反応して、アルカンとなります。このような反応を付加反応といいます。

私たちはパソコン上でエチレン分子に塩化水素 (HCl) や水 (H_2O) や酢酸分子 (CH_3COOH) を衝突させて遷移状態を作り、エネルギーを最小化することによって反応がどういうふうになるか (遷移状態がどのように変化するか) を調べました。次にその結果を図で示します。

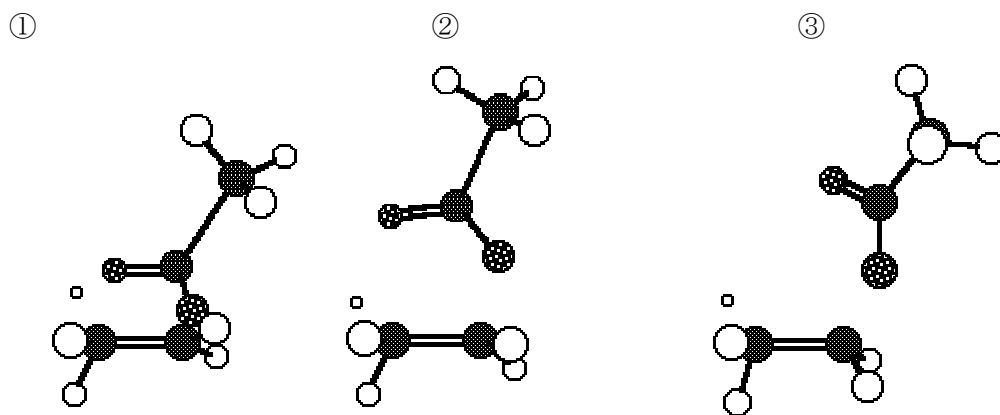
(1) エチレン分子に塩化水素 (HCl) を衝突させたときの変化



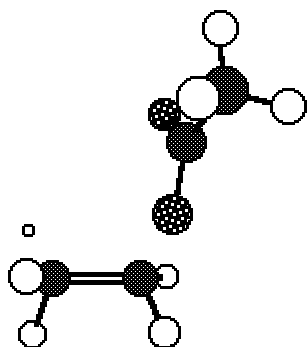
(2) エチレン分子に水 (H₂O) を衝突させたときの変化



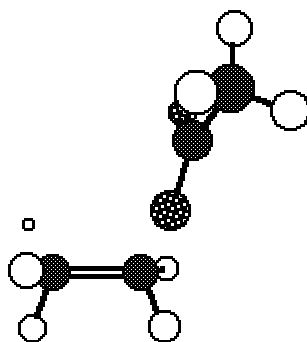
(3) エチレン分子に酢酸分子 (CH₃COOH) を衝突させたときの変化



④



⑤



4. まとめ

パソコンを使うことによって、実際には見ることでできない分子の反応過程を見ることができました。自然科学の研究において、コンピュータが必要不可欠になると思います。

5. 感想

私達の班は化学班でありながら量子力学というほとんど物理的な内容にとっても苦しみました。私達の生活している世界と微小な原子・分子の世界とは適応する力学法則が全くと言ってよいほど異なります。課題研究の最初は、量子力学というものの基礎知識をつけることから始まりました。最初は見たこともない記号や数式のオンパレードで頭がおかしくなりそうでしたが、担当の山本先生の丁寧な説明のおかげで何とかコンピュータ活動に入ることができました。

コンピュータ上で反応のシミュレーションをするのは全員初めての体験だったので、うまくいかない日々がしばらく続きました。しかし、またまた山本先生の熱心な指導のもと無事反応した時は、放課後遅くまで頑張り続けた甲斐があったと感動しました。

今回の課題研究全体で、強く感じたことは、物理と化学の世界のあまりの関係の深さでした。班員全員が以前よりいっそう科学に興味をもてるようになったということが、一番の収穫だったのではないかと思います。

プロトプラストの単離と融合

大浦 楠井 石戸 森田 吉岡 若林

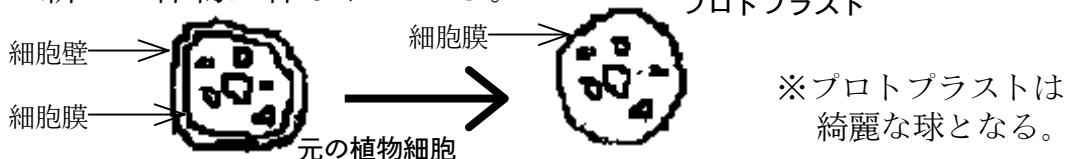
はじめに

遺伝子組換え食品をはじめ、バイオテクノロジーは今最も注目されている分野の一つである。今回は、その基本的実験であるプロトプラストの単離と融合を通し、バイオ技術の一端に触れてみたい。

プロトプラストとは

「プロト」は“最初の 原始の”，「プラスト」は“形成されたもの”という意味で、あわせて“生命活動の本体”をあらわす。プロトプラストは原形質体とも呼ばれ、細胞壁のない植物などの細胞を指す。

プロトプラストは外部のものを取り込みやすいため、DNA の操作や細胞融合に適している。実際に細胞融合により、ポマト（ポテト + トマト）、オレタチ（オレンジ + カラタチ）、ヒネ（ヒエ + イネ）などの新しい作物が作られている。



プロトプラスト 利用の利点

以前までは、新しい品種を作ろうとする場合、交配による方法しかなかったため、近類種でしか作れなかった。

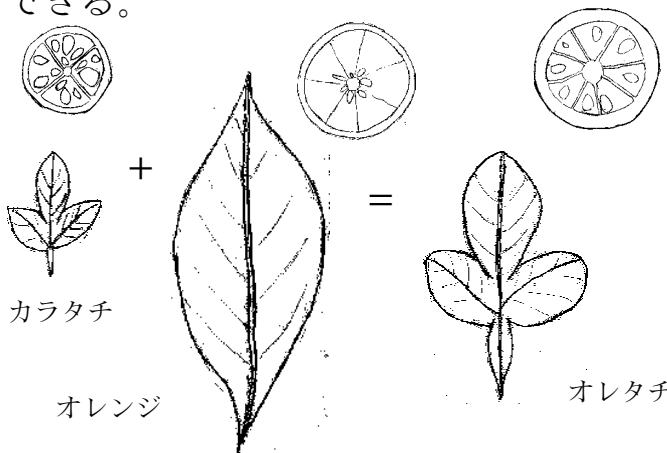
しかしプロトプラストを利用すると、そのような問題は解決し、新種を育てる時間も短縮できる。

そのことから、違う品種の長所を得るために利用されるが、成功例はまだ少ない。

オレタチ～世界初^{*1}の融合果樹～

オレタチの葉は、カラタチの葉の形とオレンジの葉の大きさと丸み、オレタチの実は、カラタチの実の強い香りと、オレンジの実の大きさを受け継いでいる。

ポマトは一代限りだったのだが、オレタチは、種を作り、種を維持することができる。



*1 1985年, キッコーマン

プロトプラストの単離

材料	ニンジン，ピーマン，赤パプリカ，黄パプリカ，カボチャ，ミカン，コマツナ，大根の葉，赤カブの葉
器具	試験管，ビーカー，ツンベルク管，メスフラスコ，遠心分離器，沈殿管，電子天秤，pH 測定器，ホールスライドガラス，顕微鏡
薬品	細胞単離酵素（マセロザイム R-10）0.20 g 細胞壁溶解酵素（セルラーゼオノヅカ R-10）0.80 g D-マンニトール 0.75mol/l(13.663 g) 塩酸・水酸化ナトリウム水溶液 0.1mol/l

浸透圧の測定

原形質分離の状態であればプロトプラストが単離しやすい。そこで、D-マンニトールを使用し、酵素液を高張とする。

はじめ、昨年度の研究^{*1}と同様 0.60mol/l としていたが、プロトプラストはほとんど観察できなかつた。そこで、各材料が原形質分離する濃度^{*2}を測定することとした。

材料	ニンジン，ピーマン，赤パプリカ
器具	試験管，スライドガラス，顕微鏡
試薬	シヨ糖溶液 (0.65mol/l, 0.75mol/l, 0.85mol/l)

①	材料を薄く切る。		0.65	0.75	0.85
②	シヨ糖溶液に入れ，10分ほどおく。	ニンジン	△	○	○
		ピーマン	×	○	○
		赤パプリカ	×	○	○
③	顕微鏡で観察し，原形質分離しているか調べる。				

表 原形質分離の状況

結果として，0.75～0.80mol/l が適当と考えられる。そこで，すべての使用材料で，濃度は 0.75mol/l に設定することにした。

*1 平成 12 年度理数科課題研究『プロトプラストの単離と融合』，富山県立富山中部高等学校

*2 浸透圧はモル濃度に比例する。

酵素液の準備とプロトプラストの単離

- ① 蒸留水 60ml に D-マンニトールを 13.66 g (0.75mol/l) 溶かす。
- ② マセロザイム (ペクチナーゼ) とセルラーゼを加え、さらに蒸留水を加えて全液量を 100ml とし、よく混ぜて酵素を全て溶かす。
- ③ pH 測定器で調べながら、塩酸と水酸化ナトリウムを使って pH 5.6 に調整する。
- ④ 試料を細かく切り、酵素液 10ml 当たり 2.0 g ずつツンベルク管に入れる。
- ⑤ アスピレーターで空気を抜き、酵素液を細胞間にしみ込ませる。
- ⑥ そのまま 24 時間放置する。
- ⑦ ツンベルク管下部の液を取り、沈殿管に入れて遠心分離器に 5 分間かける。

※高張液を作るときに、ショ糖ではなく、D-マンニトールを使うのはなぜか

細胞内に取り込まれる量が、ショ糖より D-マンニトールの方が比較的少なく、実験にあまり影響がないから。

D-マンニトール

D-Mannitol $C_6H_{14}O_6$

CH₂OH • 融点 162~168°C

| • 分子量 182.17

HO—C—H

| • 白色無臭の結晶性粉末

HO—C—H

| • 甘く (ショ糖の 50~60% の甘味), 冷感がある

H—C—OH

H—C—OH

| • 水に溶けやすい

CH₂OH • 6価の糖アルコール

プロトプラストの観察

- ① 沈殿管の下部の液をピペットでホールスライドガラス (一つ穴) に取り出す。
- ② 顕微鏡で観察する。
- ③ プロトプラストであることを確認するため、蒸留水を流し込む。プロトプラストであれば細胞壁が無いいため、破裂する。

多量のプロトプラストが観察できたもの:

ニンジン, 赤パプリカ, 黄パプリカ, ミカン

プロトプラストが観察できたもの:

ピーマン, カボチャ

プロトプラストが観察できなかったもの*1:

コマツナ, 大根の葉, 赤カブの葉

*1 色素により濁り、観察できなかった。

プロトプラストの融合

器具 顕微鏡，ホールスライドガラス（一つ穴），
柄つき針，スポイト

薬品 PEG（ポリエチレングリコール）4000 溶液（40%）

- ① ホールスライドガラスにプロトプラストを採取する。
- ② スポイトにより周囲に PEG 溶液を滴下し，柄つき針で静かにかき混ぜる。
- ③ 雪だるまのようにくっついているプロトプラストを探す。

くっついているプロトプラストはやがて融合する。

結局，同種（ニンジン・ピーマン同士）での融合は観察できたが，異種での融合は観察できなかった。

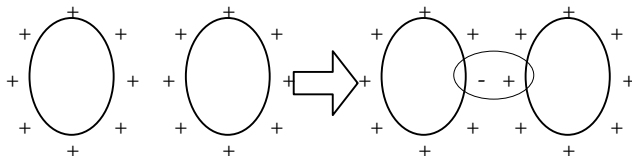
※細胞融合の方法には，PEG などを使う化学的方法と，電気パルスによる物理的方法がある。

PEG（ポリエチレングリコール）

Polyethylene-glycol $\text{H}(\text{OCH}_2\text{CH}_2)_n\text{OH}$

PEG は，水溶性高分子で刺激が無く，保湿剤・界面活性剤として化粧品や口腔品に用いられる薬品である。平均分子量 200～20,000 程度が凡用である。

この薬品が植物細胞のプロトプラストの融合に用いられるのは，「+」に帯電している細胞膜を部分的に「-」に帯電させることができるからである。



※細胞質の融合後，核も融合する。また，細胞壁も再生される。

融合したプロトプラストの培養

融合した細胞を無菌培養することで，はじめに挙げたような新たな植物を作ることができる。

しかし，たとえそこまで成功したとしても，種子が採取できなければその世代限りで終わってしまうなど，決して容易でない作業である。

酵素液などの条件

今回の実験では、プロトプラストを安定供給できる酵素液などの条件を探り、また融合を成功させるために、ウェブなどの文献を参考にしつつ実験を繰り返したが、うまくいかなかった。

そこで、プロトプラストを使った研究を行っている富山大学理学部を訪問し、詳しい話をうかがった。それをもとに、実験の内容を根本から見直してみることになった。

左の表のとおり、D-マンニトールの濃度とペクチナーゼを除き、今までの実験の条件とプロトプラストに最適な条件にはかなりの違いがあることが判明した。

	これまで	見直し後
D-マンニトール	0.75mol/l	0.75mol/l
セルラーゼ	0.8 g	4.0 g
	そのまま	遠心分離*1
ペクチナーゼ	0.2 g	0.2 g
pH	5.6	5.6
空気	抜く	抜かない
溶解時間	24時間	3時間程度
温度	室温	25°C~30°C

表 見直し前後の条件の変化

中でも一番の問題は、空気を抜いたことではないだろうか。植物も生物なので呼吸をするのだから、酸素を抜くということは、細胞の働きを阻害しているということである。単離だけの場合はこれでも成功となるのだが、融合するには生きの良いプロトプラストが必要である。そこで溶解時間を3時間にし、数は少なくとも融合に適した質のよいプロトプラストをつくることにした*2。

材料については、果実よりも葉肉や花卉の方が適している。表皮を敢えて避ける必要はないが、表皮は酵素が入りにくいため、細かくするのがよい。その際、カッターなどではなく、両刃のかみそりなどを使用すべきである*3。

*1 不純物を取り除くため。

*2 さらに、空気と触れる表面積を多くするため、三角フラスコなどを使うようにする。また、酵素と十分触れ合うよう、ゆっくりと振動させるのがよいようだ。

*3 切り口の鋭いもので切ることで、材料の組織の損傷を最小限に抑えるため。コマツナ等で色素により観察できなかったのは、葉緑体が壊れたためと思われる。

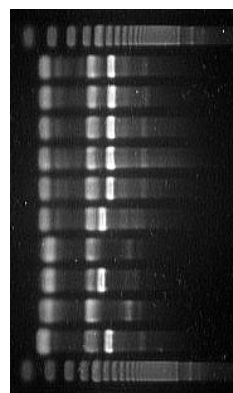
全体としては、自分たちで調べずに、昨年の課題研究のデータをそのまま利用したことがいけなかった。プロトプラストは生物なので、機械の測定のようにぴったりと値が出たり思い通りになるということは少ないだろうがもう少ししっかり自分たちで調べ、きちんとやっていき、あやふやな部分をなくしていきたい。

また、「温度」、「時間」などの要素についてまったく考えていなかったのも、今後これらの要素にも考慮してプロトプラストに適した条件での実験を進めていきたい。また融合しただけでは、プロトプラストを利用したことにはならないので、融合したプロトプラストの培養まで発展させたい。ただ、今回は使用した薬品が、どのようなものかを詳しく調べることができたし、融合失敗の理由も知ることができたのはよかった。

ニッポンジーン見学

最先端のバイオ技術の一端に触れようと、株式会社ニッポンジーン^{*1}を見学した。ニッポンジーンでは遺伝子操作に関連する製品や妊娠検査薬などが研究・製造されている。今回はその工場内を見学させていただいた。

中でも特に印象的であったのはアガロースゲル電気泳動で、アガロースゲルに電流を流し、染色体を移動させるというものである。核酸は、溶液中ではH⁺が電離し、染色体そのものはマイナスの電荷を帯びることになる。これに電流を流すと染色体は陽極に移動するが、アガロースゲルの小さな穴をくぐりぬけていく過程で、染色体は大きさ別に並ぶことになる。これに紫外線を当てることによって染色体を見ることができる。（遺伝子解析写真）



ところで、ニッポンジーンでは細菌などからDNAなどを取り出して利用しているとのことである。植物は培養に時間がかかるなど不便なことも多いため、大腸菌や納豆菌などの比較的安全な菌類が使われる。

なお、この研究にあたり、株式会社ニッポンジーン及び富山大学理学部生物学科^{*2}（増田，山田両先生）のご協力を賜った。この場を借りて感謝したい。

*1 <<http://www.kongo.co.jp/npgene/>>

*2 <<http://www.sci.toyama-u.ac.jp/bio/>>

感覚器について - 視覚と聴覚 -

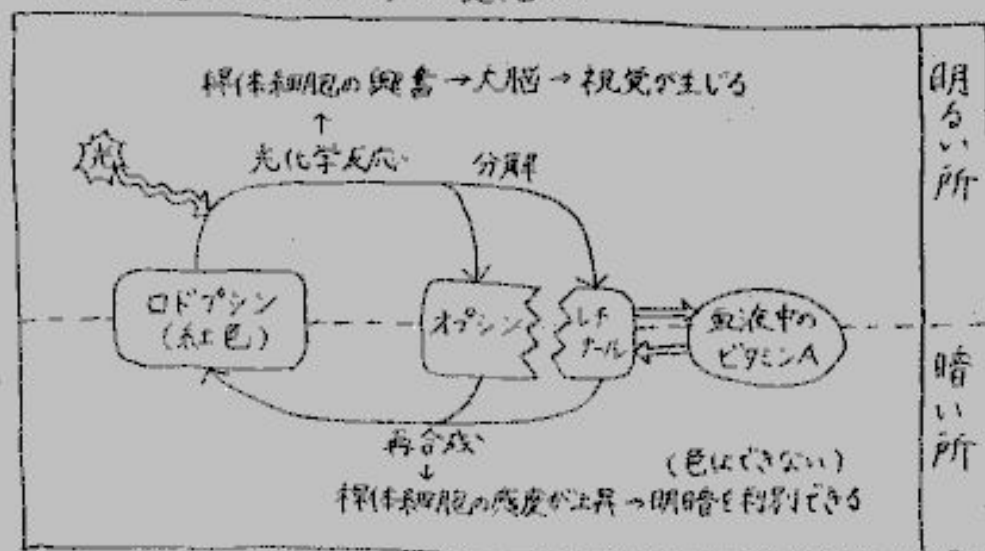
老田春菜 岡崎勝彦 坂田拓郎 前川綾香
河合隆徳 新村里美 橋本亜香利

1. 視覚について

< 明順応・暗順応について >

網膜の桿体細胞の中にはロドプシン(視赤)という物質が含まれる。
ロドプシンとは、オプシンというタンパク質とレチナルが結合した物質である。

～光の受容によるロドプシンの変化～



明順応

急に明るくなる時ロドプシン急激に分解⇒見えにくい⇒ロドプシン減少⇒見える

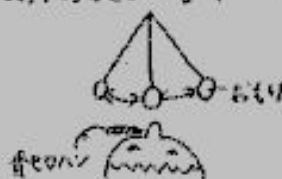
暗順応

急に暗くなる時ロドプシン少ない⇒見えない⇒ロドプシン増加⇒見える

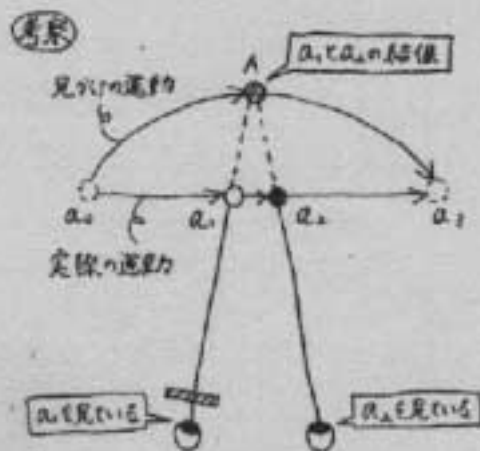
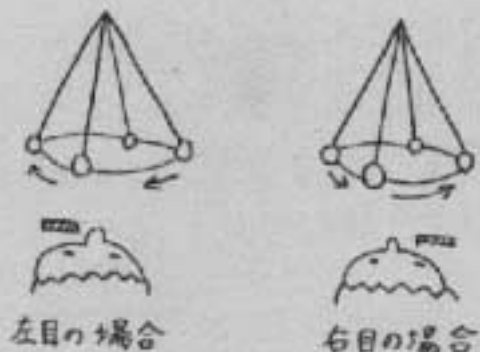
< 暗順応に関する実験 >

目的 片目だけ暗順応の状態にするときどのように見えるか調べる

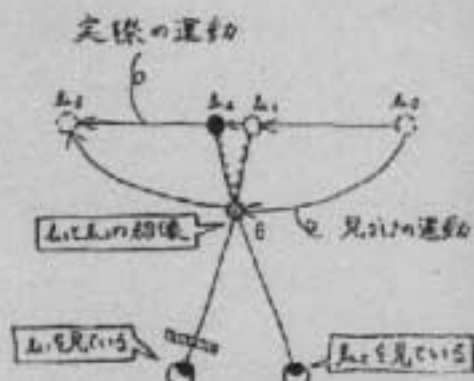
- 方法
- 1) 片目にフィルター(青セロハン)をかける
 - 2) 振り子運動しているおもりを見る
 - 3) フィルターをかける目を交替して見る
 - 4) フィルターを30分以上かけてから行う



(結果) おもりが水平面上を
 精四運動している様
 に見える
 ↑
 30分以上フィルターを
 かけておいても同じ
 だった



右目が現在の像 a_2 を見ているとき
 左目は過去の像 a_1 を見ている

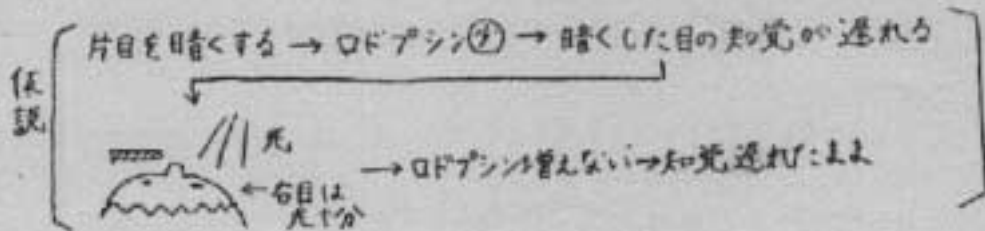


右目が現在の像 b_2 を見ているとき
 左目は過去の像 b_1 を見ている

左目の知覚がおくられている

※右目の場合も同様に考えられる

この実験より、薄暗いところでは知覚が遅れるということがわかった。
 そして、30分以上フィルターをかけておいても同じように知覚が遅れて
 いたので、フィルターをかけた目に暗順応は起こらないと考えられる。
 そこで仮説は、フィルターをかけていても、もう片方の目は十分光が当たっ
 ているので、脳がロドプシンを再合成する必要がないと感じ、ロドプシン
 が増殖しないので、知覚が遅れたまま、暗順応が起こらないのだ
 ろうと仮説をたてた。



そこで私は、この仮説を定証するための実験を行った。

< 実証実験 >

① 目的 片目に十分光が当たっているとき、片目が暗くて暗順応が起こらないことを定証する

② 方法 1) 通常の暗順応までの時間を計る

「暗い所で、30cm離れた所からこの大きさの文字が読めるようになるまでの時間」

存在意義

2) 明るい所から暗い所へ行き、1で計った時間が過ぎるまで、片目だけに光を当てておく

3) 光を当てていた目を閉じ、光を当てていなかった方の目だけで1の文字を見る

4) 3の状態のまま文字を見ていて、読めるようになってくるか調べる。また、それまでの時間を計る

③ 結果

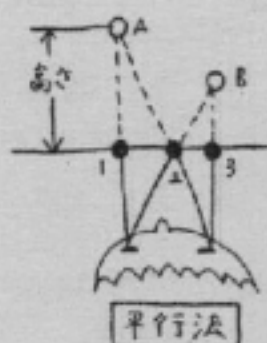
実験者	暗順応までの時間	読めるようになってきたか	読めるまでの時間
Aさん	10分	○	13分
Bくん	16分	○	11分

④ 考察 片目に光を当てていたときに読めなかった文字が、光を当てるとやめると読めるようになってきたことから、片目に光を当てていた時は暗順応が起こっていないということがわかった。その上、暗順応までの時間が、片目に光を当てるとやめてから文字が読めるようになるまでの時間と（ほとんど）同じだったことから、光を当てるとやめてから暗順応が起こったことが確かめられる。よって、仮説は正しいと言えるだろう。



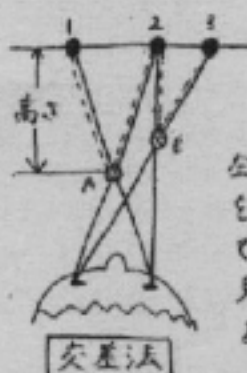
はじめに行った実験のように、平面のものが立体的に見えるということについてさらに調べてみた。

<3Dの原理>



左目で1, 右目で2の点
を見るとAの位置、左目
で2, 右目で3の点を見
るとBの位置に点があ
るように見える

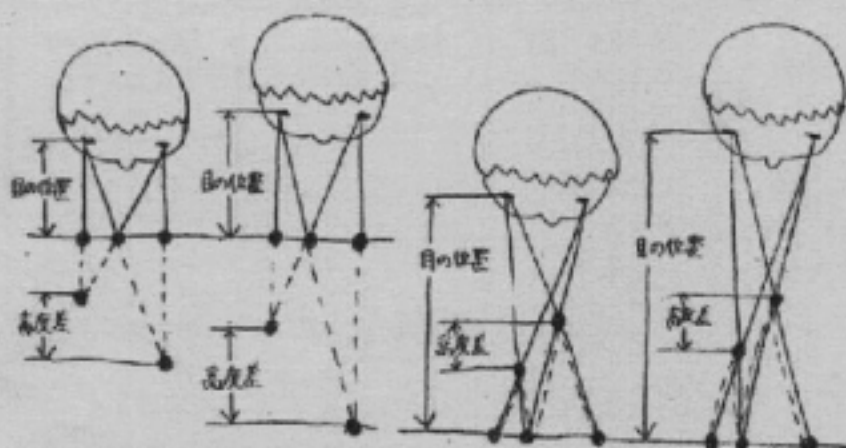
作品より奥に結像



左目で2, 右目で1の点
を見るとAの位置、左目
で2, 右目で3の点を見
るとBの位置に点があ
るように見える

作品より手前に結像

1の点と2の点、2の点と3の点の間隔の違いがAとBの高さの違いになる。



(作品と目の位置により結像位置が変化し、高度差も変化する。

11

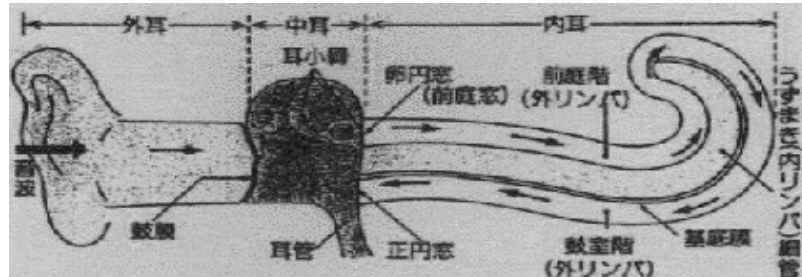
作品から目を離すと高度差が大きくなり、立体感が強まる。

<感想>

視覚は、はかり数値に表れないので「大変だったけど」、視覚は月面が感じていることなどいろんなことがわかってきておもしろかった。実験結果から、自分たちで疑問を出し、発展させて、仮説を立てて自分たちで実験を作り出すのが新鮮で楽しかった。身近なことを発展させ、新たな発見ができたとき最高だった。

2. 聴覚のメカニズム

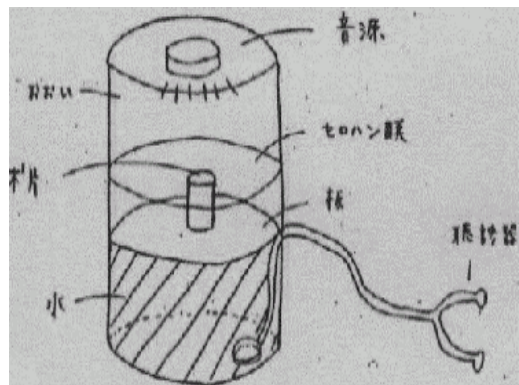
1) 耳の構造



【目的】 耳をモデル化し各部の役割を確かめる。

【実験】 図の装置を用いて音の聞こえやすさを調べる。

音を鳴らしいろいろな条件下での聞こえやすさを比べる。



① セロファンがある場合とない場合の比較

【結果】 セロファンがある方が聞こえやすい。

② 水がある場合とない場合の比較

【結果】 水がある方が聞こえやすい。

② 木片がある場合とない場合の比較

【結果】 木片がある場合の方が聞こえやすい。

【結論】 以上の実験から鼓膜、耳小骨、リンパ液の存在意義を確認することができた。

2) 音源定位

【目的】 音源定位に必要な音響物理的要因を明らかにする。

～音源定位・音源定位の定義～

- 音源定位……音源から音波が発射されたとき通常知覚された音源の位置 (距離、方向) を判断すること。
- 音源定位……判断した音源の位置と音源の位置が一致すること。

【実験方法】

- ① 半径 2m の円を地面に描きそれを 12 等分する。
- ② 被験者は円の中央に座り目隠しをする。
- ③ 被験者の正面を 12 番として時計の文字盤と同様にして文字をふりわけ。
- ④ 検査者はランダムに 12 通りの位置から音源をならし、被験者は自分が判断した方向 (音源方向) を答える。
- ⑤ 実験 1 ～ 5 のそれぞれの条件で 144 (12×12) 回行う。

	音の高さ	使う耳		音の高さ	使う耳
実験 1	440 Hz	両耳	実験 4	440 Hz	右耳
実験 2	2オクターブ高	両耳	実験 5	440 Hz	左耳
実験 3	2オクターブ低	両耳			

⑥ 3人に対して以上の実験を行い、各条件の各位置における正答率、誤差平均（誤った場合の誤差の幅の大きさ平均）のデータを得る。

【実験結果】

～位置別の正答率～

～位置別の誤差平均～

位置	実験 1	実験 2	実験 3	実験 4	実験 5
1	47.2%	43.8%	31.3%	22.9%	18.8%
2	47.2%	33.3%	37.5%	25.0%	22.9%
3	41.7%	31.3%	27.1%	29.2%	33.3%
4	38.9%	29.2%	27.1%	20.8%	16.7%
5	30.6%	41.7%	27.1%	14.6%	25.0%
6	38.9%	31.3%	29.2%	18.8%	10.4%
7	36.1%	39.6%	10.4%	25.0%	12.5%
8	25.0%	31.3%	22.9%	27.1%	22.9%
9	33.3%	31.3%	22.9%	33.3%	27.1%
10	52.8%	37.5%	18.8%	10.4%	25.0%
11	58.3%	37.5%	22.9%	29.2%	27.1%
12	50.0%	58.3%	45.8%	27.1%	31.3%
平均	41.7%	37.2%	26.9%	23.6%	22.7%

位置	実験 1	実験 2	実験 3	実験 4	実験 5
1	0.56	0.50	0.63	0.96	1.10
2	0.67	0.50	0.65	0.83	0.85
3	0.58	0.50	0.65	0.63	0.58
4	0.58	0.63	0.77	0.92	0.90
5	1.13	0.71	1.15	1.38	1.60
6	1.56	1.56	1.75	2.23	2.56
7	1.10	0.71	1.63	1.38	2.00
8	0.77	0.50	0.83	0.71	0.73
9	0.65	0.60	0.63	0.54	0.75
10	0.50	0.56	0.69	0.96	0.67
11	0.67	0.38	0.79	0.92	0.75
12	0.71	0.35	0.40	0.94	0.77
平均	0.79	0.63	0.88	1.03	1.11

次ページのグラフ（上）

次ページのグラフ（下）

【実験結果からわかったこと】

- 1) 人は首を動かさなくても音源を定位することができることがわかった。
- 2) 人の耳は左右に比べて前後の音の定位が難しいことがわかった。
- 3) 実験 1 と 4, 5 の比較から両耳では片耳の時より正確に音源を定位することができることがわかった。
- 4) 実験 4, 5 から片耳の時は両耳の時に比べて音源を定位しにくくなるが、それは特に左右に比べて前後において著しいことがわかった。
- 5) 人の耳は真後ろの定位が一番しにくいことがわかった。
- 6) 実験 1, 2, 3 の比較から高い音のほうが正確に音源を定位することができることがわかった。

【今後の課題と感想】

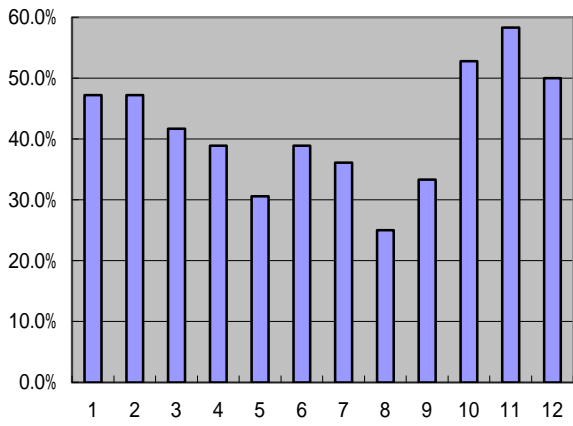
上に示した実験結果は、ほぼ予想通りであった。

2000 回以上の実験を行い、データを採取したが、これらの実験は、学校の限られた音響設備を利用してのものであり音の反射などの影響を考えると、必ずしも成功とは言いがたい。

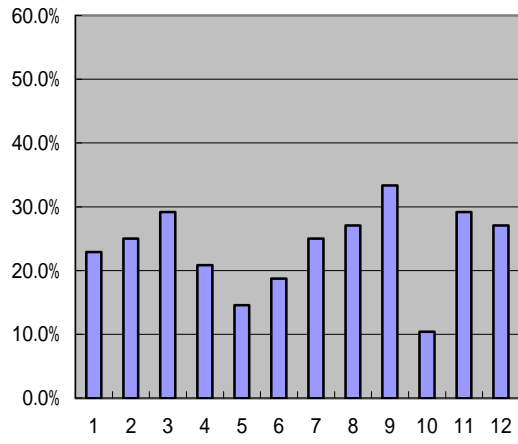
音の高さは4オクターブの幅で実験を行ったが、さらに音の高さによっての効果を試してみたいと思った。

私たちの感覚器は各部位が受け持つ役割を効率よく果たすためそれぞれ意義のある構造をしている。

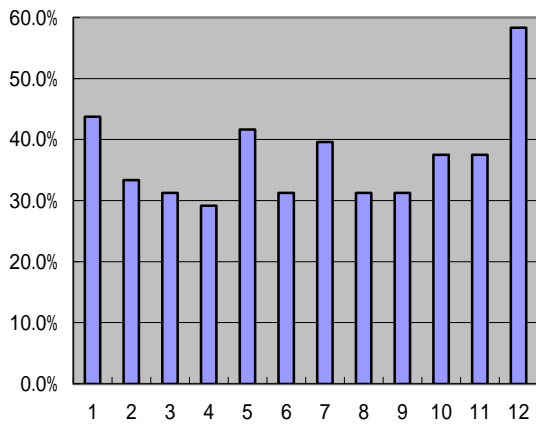
実験 1



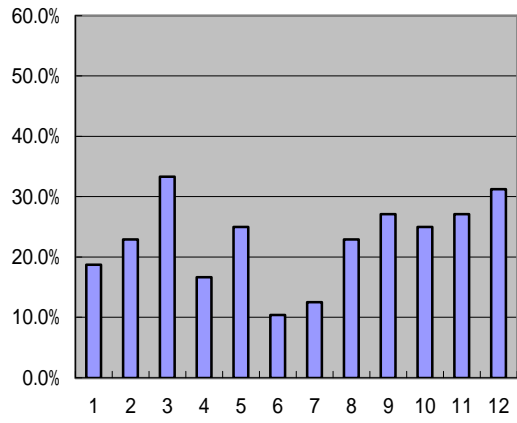
実験 4



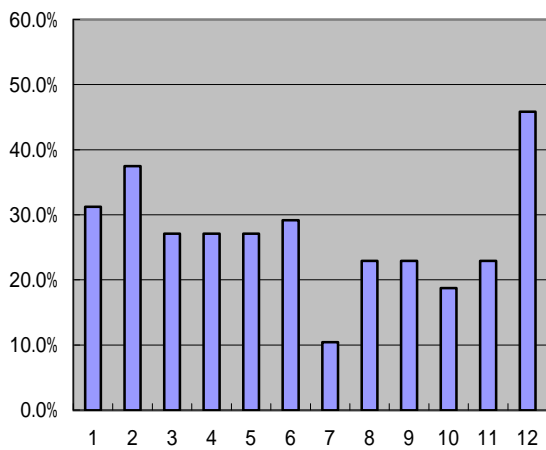
実験 2



実験 5

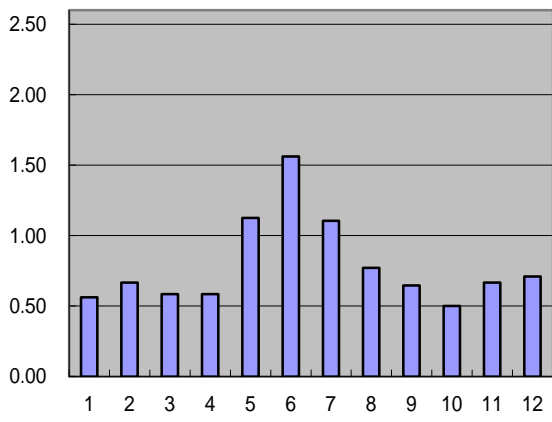


実験 3

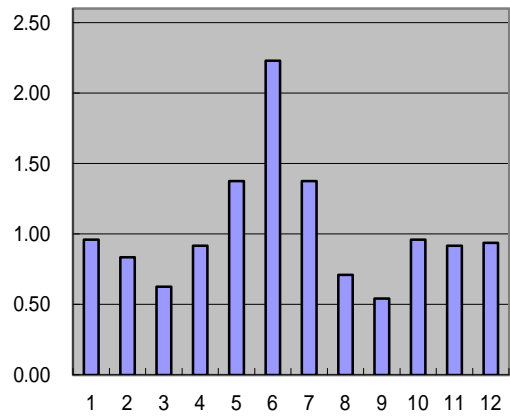


位置別の正答率

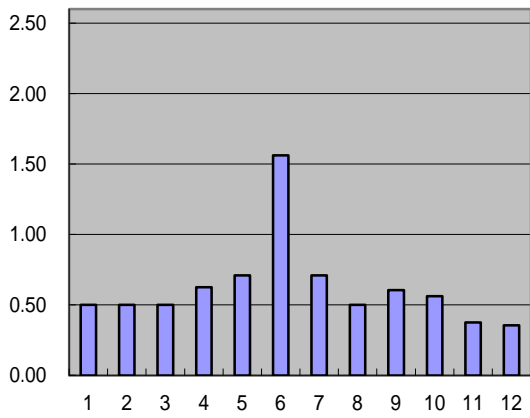
実験 1



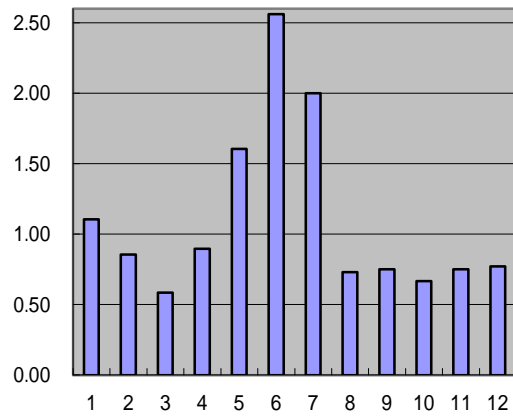
実験 4



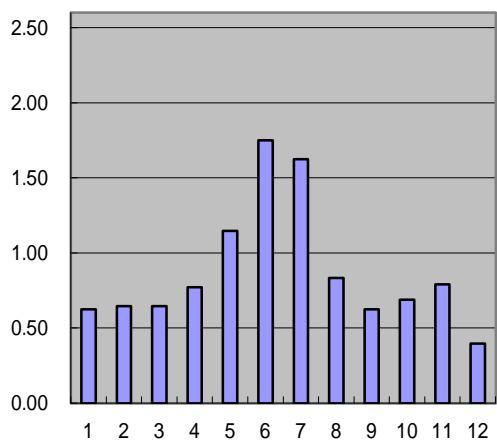
実験 2



実験 5

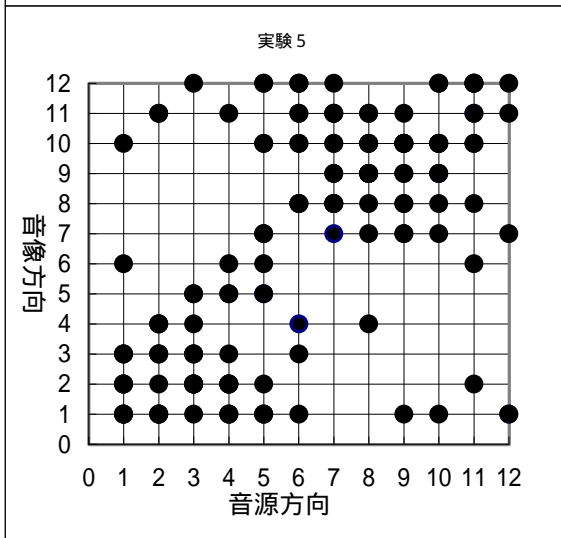
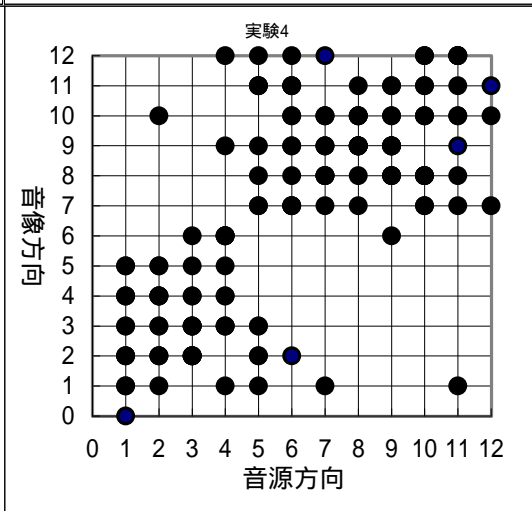
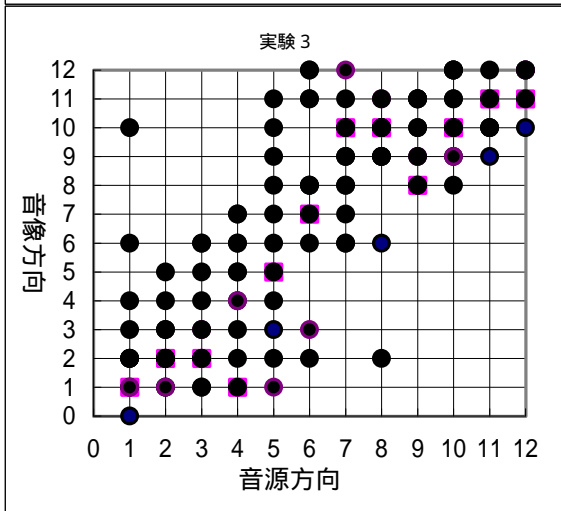
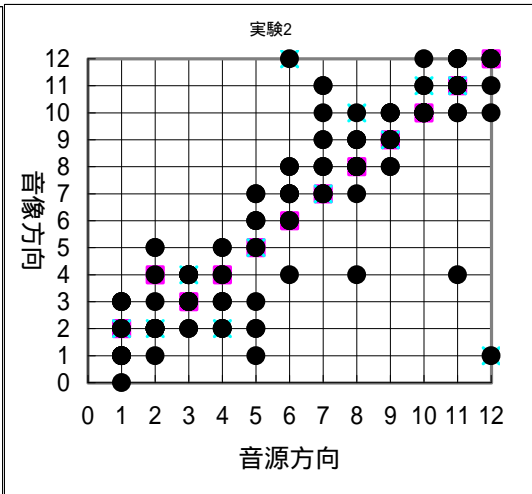
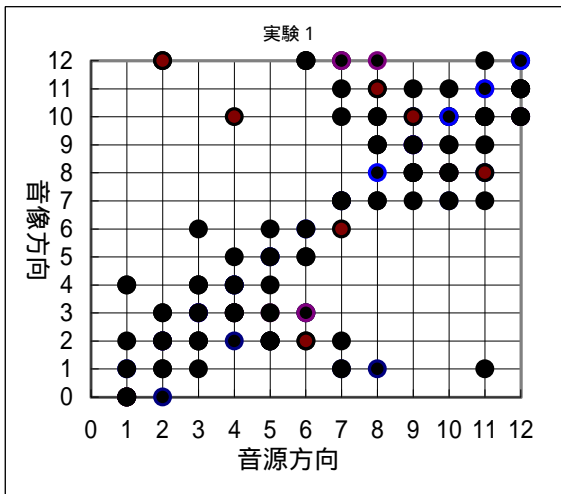


実験 3



位置別の誤差平均

音像方向と音源方向のグラフ



数学課題研究 興味ある6つの課題

はじめに

私達の周りにありふれている数学の世界。今、私達はそれを学校の授業の中で取り扱っていますが、ここではそんな数学を教科書の枠を超えて、本当に素朴な疑問から探らし、興味深い課題に仕上げてみました。それでは皆さん数学の本当の面白さを十分堪能してください。

各研究テーマ

- | | |
|---------------------------------------|-------|
| (1) フランク・モーリーの定理 | 本田 康介 |
| (2) 三角形の等角共円点に学ぶ | 高橋 玄爾 |
| (3) $\frac{1}{n}$ (n は整数)の循環小数について | 本 朋希 |
| (4) モンテカルロ法について | 坂野 健 |
| (5) 集合の濃度について および ルベーグ積分の入り口 | 小森 聖子 |
| (6) パラドックスについて | 谷道 麻衣 |

(1) フランク・モーリーの定理について

フランク・モーリーの定理とびー?

本田 康介

「三角形の各辺の両端における内角の3等分線のうち辺に近いもの同士は正三角形を作る。」という定理で最も美しい定理である、といわれているものです。

—証明—

右の図のように $\angle B$ 、 $\angle C$ の3等分線を引き、

交点を G 、 D とします。このとき、点 D は $\triangle GBC$ の内心

となります。ここで、 $\angle A = 3\alpha$ とかくと、

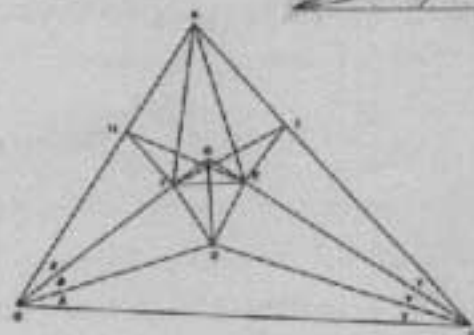
$$3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180^\circ \text{ すなわち、 } \alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$$

となることに注意します。次に、 GC 、 GB 上に各々

$\angle GDE = \angle GDF = 30^\circ$ となる点 E 、 F をとります。

$\triangle GDE$ と $\triangle GDF$ は、 GD 共通、 $\angle GDE = \angle GDF = 30^\circ$

また、点 D は $\triangle GBC$ の内心なので $\angle DGE = \angle DGF$ によって $\triangle GDE = \triangle GDF$ となり、 $DE = DF$ 、 $GE = GF$ を使って、 $\triangle DEF$ は頂角 60° の二等辺三角形、すなわち正三角形となります。また、 $\triangle GEF$ は二等辺三角形で、両底角の大きさは、 $(180^\circ - \angle G) \div 2 = (2\beta + 2\gamma) \div 2 = \beta + \gamma = 60^\circ - \alpha$ 更に、 AB 、 AC 上に各々 $BD = BH$ 、 $CD = CI$ となる点 H 、 I をとります。このとき、 $\triangle BDF = \triangle BHF$ 、 $\triangle CDE = \triangle CIE$ となるので、 $FD = FH$ 、 $ED = EI$ 、 $\triangle DEF$ は正三角形なので、 $FE = FH$ となり、 $\triangle FEH$ は二等辺三角形で、頂角 $\angle HFE = \angle GFE + \angle GFH = \angle GFE + \angle GFD = (60^\circ - \alpha) + (60^\circ - \alpha + 60^\circ) = 180^\circ - 2\alpha$ 、よって両底角の大きさは α となります。同様に $\triangle FEI$ も $EF = EI$ の二等辺三角形で、両底角の大きさは α となります。 $\angle HFI = \angle HFE - \angle EFI = (180^\circ - 2\alpha) - \alpha = 180^\circ - 3\alpha$ 、 $\angle A = 3\alpha$ より、四角形 $AHFI$ は内に内接します。同様に四角形 $AI EH$ も内に内接するので、結局、五角形 $AHFEI$ は内に内接します。よって $\angle FAH = \angle FEH = \alpha$ 、 $\angle EAI = \angle EFI = \alpha$ となり、 AF 、 AE は $\angle A$ の3等分線になります。



(2) 三角形の等角共円点について

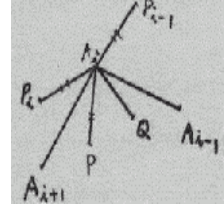
高橋 玄頭

定理1 凸 n 角形 $A_1 A_2 \cdots A_n$ の内部に 2 点 P, Q があり、 $\angle P A_i A_{i+1} = \angle Q A_i A_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ならば $\angle P A_n A_1 = \angle Q A_n A_{n-1}$, ($A_n = A_0$)

証明 $\angle A_j = \theta_j$ ($1 \leq j \leq n$), また $1 \leq i \leq n-1$ に対して $\alpha_i = \angle P A_i A_{i+1} = \angle Q A_i A_{i-1}$ とする

そして $\beta_i = \theta_i - \alpha_i$ とおき、 P の $A_i A_{i+1}$ に関する対称点を P_i とする

$$\begin{aligned} & \angle A_{i-1} A_i P_{i-1} + \angle A_{i-1} A_i Q \\ &= \angle A_{i-1} A_i P + \angle A_{i-1} A_i Q = \beta_i + \alpha_i = \theta_i < \pi \end{aligned}$$



Q と P_{i-1} は $A_{i-1} A_i$ に関して反対側にあるので $\angle Q A_i P_{i-1} = \theta_i$, 全く同様に $\angle Q A_i P_i = \theta_i$,

また $A_i P_{i-1} = A_i P_i$, $A_i Q$ 共通より $\Delta A_i P_{i-1} Q \cong \Delta A_i P_i Q$, これより $P_{i-1} Q = P_i Q$,

$\therefore P_0 Q = P_1 Q = \cdots = P_{n-1} Q$, ところで $A_n P_0 = A_n P = A_n P_{n-1}$, $Q A_n$ 共通より

$\Delta Q A_n P_0 \cong \Delta Q A_n P_{n-1}$, $\therefore \angle Q A_n P_0 = \angle Q A_n P_{n-1}$, また

$$2\angle Q A_n P_{n-1} = \angle P_0 A_n Q + \angle Q A_n P_{n-1} = 2\angle P A_0 A_1 + 2\angle P A_0 A_{n-1} = 2\theta_n,$$

$$\therefore \angle P A_n A_1 = \theta_n = \angle P_0 A_n Q, \angle P_0 A_n A_1 = \angle P_0 A_n Q - \angle A_1 A_0 Q = \theta_i - \angle A_1 A_0 Q = \angle Q A_0 A_{n-1}$$

$$\therefore \angle P A_n A_1 = \angle Q A_n A_{n-1}$$

定理2 A. 凸 n 角形 $A_1 A_2 \cdots A_n$ は、 P, Q を焦点とするある楕円 C に外接する

B. 凸 n 角形 $A_1 A_2 \cdots A_n$ がある楕円に外接するときその凸 n 角形は、定理1 のようである

証明 A. P, Q を焦点とする長半径 $\frac{P_0 Q}{2}$ の楕円を C とする。直線 $A_i A_{i+1}$ 上の任意の点を X_i

$$\text{とすると、三角不等式より } P X_i + Q X_i = P_i X_i + Q X_i \geq P_i Q = P_0 Q$$

であり、等号成立は X_i が直線 $A_i A_{i+1}$ と $P_i Q$ の交点 R_i に一致する

ときである。 R_i は楕円の定義より C 上に存在する。一方直線 $A_i A_{i+1}$

は C の外部 (周上も含む) に存在しているので C と直線 $A_i A_{i+1}$ は R_i で接する。 i は任意な

ので凸 n 角形 $A_1 A_2 \cdots A_n$ は C の外部 (周上も含む) に存在して、各辺は C と接することより題意は示された。

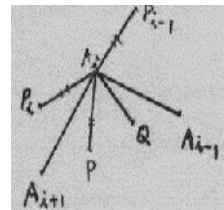
証明 B. ある楕円と直線 $A_i A_{i+1}$ との接点を Y_i 、ある楕円の焦点を P, Q 。 P の $A_i A_{i+1}$ に関する対称点を P_i とすると、直線 $A_i A_{i+1}$ と Y_i で垂直に交わる直線は $\angle P Y_i Q$ の角の二等分線で

あるという楕円の性質より $\angle P Y_i Q = \pi$, よって 3 点 P_i, Y_i, Q は一直線上にあり、

$$P_i Q = P Y_i + Y_i Q, \text{ 後は定理1と同様にして示せる。ただし定理2の証明において}$$

$i = 1, 2, \dots, n$ である。また定理1の $n = 3$ のときを考えるとどんな三角形にも楕円は内接

することがわかる。



(3) $\frac{1}{n}$ (n は素数) の循環小数について

車 朋希

1. 循環節の桁数 <例> $\frac{1}{7} = 0.\dot{1}42857\cdots$ 6桁 $\frac{1}{11} = 0.\dot{0}9\cdots$ 2桁

定理 I. 循環節の桁数は、 10^n を分母で割った余りが 1 になる最小の n と一致する。

—証明—

割り算をしていって、前に一度出た余りと等しい余りが出れば、そこで同じ計算が繰り返され、循環する。最初の割られる数は 1 なので、余り 1 が出ても同様に循環する。定理 I は、 $1 \div n$ (n は素数) の計算は必ず余り 1 によって循環し、他の余りが二度出ることはないということであり、またそのとき、循環節は小数第 1 位から始まる。つまり、 $\frac{1}{n}$ の循環節が必ず小数第 1 位から始まることを示せばよい。

小数中に循環節が存在するとき、その前後に出た余りは等しい。余りが等しいということは、(その前の余り) $\times 10 -$ 割る数 \times (その前の位の数) が等しいということであり、(前の余り) $\times 10$ の一の位は必ず 0 であるため、割る数 \times (前の位の数) の一の位の数が等しいと言える。一の位が 1, 3, 7, 9 のいずれかの数は、かける数の一の位と積の一の位が一对対応であるため、積の一の位からかける数、つまり前の位の数を一つに特定することができる。前の位の数が等しければ、{(割る数) \times (前の位の数) + (余り)} $\div 10$ で前の余りも等しいといえる。よって、割る数が素数のとき、小数中のある箇所循環節が存在すればその前の位の数も循環節に含むことができることになり、これを繰り返せば循環節は小数第一位から始まることになる。2, 5 を除く素数の一の位は 1, 3, 7, 9 のいずれかであるため、 $1 \div n$ (n は素数) の循環節は小数第一位から始まる。よって、命題成立。

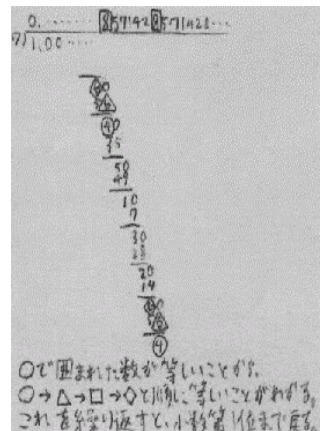
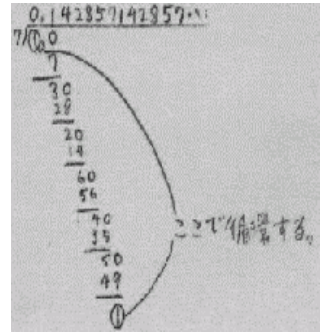
2. 循環節が偶数桁の循環小数の法則

定理 II. 循環節を半分に分けて加えると、各位の数は全て 9 になる。

<例> $\frac{1}{7} = 0.\dot{1}42857\dot{1}42857\cdots$ $142 + 857 = 999$ $\frac{1}{13} = 0.\dot{0}76923\dot{0}76923\cdots$ $076 + 923 = 999$

—証明—

$\frac{1}{\alpha}$ の循環節が $2k$ 桁だとすると、定理 I より、 10^n を α で割った余りが 1 になる最小の n が $2k$ となる。これより、 $10^{2k} - 1$ は α の倍数。 $10^{2k} - 1 = (10^k + 1)(10^k - 1)$ より、 $10^k + 1$ と $10^k - 1$ のうち少なくとも一方は α の倍数。ここで $10^k - 1$ が α の倍数とすると、 10^k を α で割った余りが 1 となり、 $2k$ が条件を満たす最小の n でなくなるため、不適。よって、 $10^k + 1$ が α の倍数。つまり、 $(10^k + 1) \div \alpha$ は整数。 $\frac{1}{\alpha} = 0.\dot{a}_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_{2n}$ (ただし小数展開) とおくと、 $\frac{10^k + 1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \times 10^k + \frac{1}{\alpha} = a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_{2n} + 0.\dot{a}_1 a_2 \cdots a_n = a_1 a_2 \cdots a_n . b_1 b_2 \cdots b_n$ ($b_1 b_2 \cdots b_n = a_1 a_2 \cdots a_n + a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_{2n}$) となる。整数となるためには、小数部分がちょうど 1、つまり $0.999\cdots$ の循環小数でなければならない。よって、 $b_1 b_2 \cdots b_n = a_1 a_2 \cdots a_n + a_{n+1} \cdots a_{2n} = 999\cdots$ となる。



(4) モンテカルロ法について 坂野健

(I) モンテカルロ法とは

円周率の近似値を求める方法のひとつにモンテカルロ法があります。その仕組みについて説明します。

まず xy 平面上 ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$) に原点を中心とする半径1の円 ($x^2 + y^2 = 1$) を描きます。すると領域 ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$) がこの円によって2つの部分に分けられます。次に、領域 ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$) の範囲にランダムに n 個の点をプロットします。このとき、 x 軸、 y 軸、円 $x^2 + y^2 = 1$ によって囲まれる図形を S とすると、図形 S は半径1、中心角 90° の扇形ですから、その

面積は $\frac{1}{4} \times 1^2 \times \pi = \frac{\pi}{4}$ となります。

ここで、別の考え方で図形 S の面積を求めてみたいと思います。図形 S に含まれる点の数を m とすると、領域 ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$) の面積は1ですから、図形 S の面積は プロットした点の総数 に対する 図形 S

に含まれる点の数の比、すなわち $\frac{m}{n}$ であるこ

とが予想できます。よって図形 S の面積について

$\frac{\pi}{4} = \frac{m}{n}$ すなわち $\pi = \frac{4m}{n}$ という式で π の近似

値を求めることができます。これがモンテカルロ法の考え方です。

(II) モンテカルロ法の実験

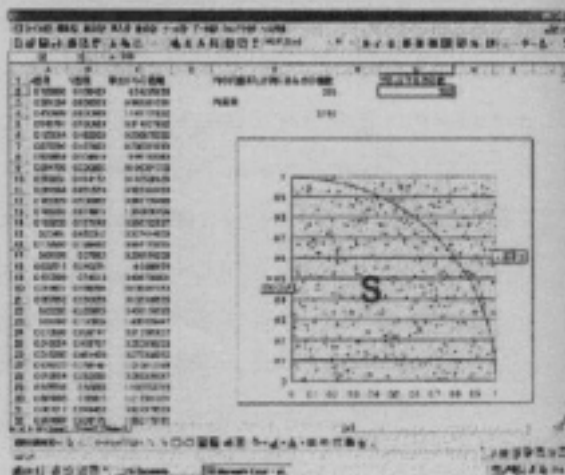
ところが、この方法によって実際に円周率を求めるとなると、幾つかの問題が生じます。その問題とは、1. どのように点を領域 ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$) に均等にプロットするのか 2. どのように点が図形 S に含まれるかどうかの判定をするのか などの問題です。これらの問題は、excel を使うことによって解決できます。

まず初めは $n=500$ (領域 ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$)) に 500 個の点をプロットする) として考えます。 xy 平面上において、1つの点は x 座標、 y 座標の2つの要素によ

って決定されるので、2つの乱数 x, y ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$) を組み合わせることによって1つの点を表すことができます。Excel 上には A、B 列の 2~501 行に関数 `rand` (0 から 1 の間の乱数を返す) を用いてこのような乱数 x, y を打ち込みます。次にそれぞれの点が図形 S に含まれるかどうかの判定をします。点 $P(x, y)$ の原点からの距離は $\sqrt{x^2 + y^2}$ ですから、点 P が図形 S に含まれるとき、この距離が1以下、すなわち $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$, つまり $x^2 + y^2 \leq 1$ となります。

Excel 上では (A 列の数)² + (B 列の数)² という計算式を C 列に打ち込みます。そして C 列にある 500 個の値のうち 1 以下になるものの個数を関数 `countif` (指定した範囲の値のうち、定めた条件 (この場合は " ≤ 1 ") を満たすものの個数を返す) を用いて m (図形 S に含まれる点の数) を求め (E2)、 $\pi = \frac{4m}{n} = \frac{m}{125}$ の式に代入することによって π の近似値を求めることができます (E4)。

【参考】 $n=500$ の場合の結果



(5) 集合の濃度について～ルベグ積分への発展～

小森 聖子

★集合の濃度

集合の元の数について考えます。元の数が有限の場合、それは有限集合と言われます。問題は元が無限にある無限集合の場合です。自然数は1, 2, 3, ...と際限がありません。この無限の大きさを可算無限といい、この集合を可算集合といいます。この自然数と1:1の対応のつく大きさを \aleph_0 と書き、アレフゼロと読み、このような集合の大きさを濃度(基数ということもある)という言葉で表現します。

■ 有理数について

有理数の集合の濃度について考えます。まず、有理数の集合を Q とすると、その濃度は可算集合のそれと同じで \aleph_0 です。

【証明】有理数は分数で表されるので、図Aのように分数を分母の同じ数ごとに並べていきます。矢印のように並べてゆくのですが、同じ数は二度と書かないことにします。こうするとすべての有理数が並べられることがわかります。すると図Bのようにこれらは自然数と1:1に対応づけられるのです。よって、集合 Q は可算集合となり、その濃度は \aleph_0 であることが示されます。

■ 実数について

次に実数の集合 R の濃度について考えます。実数は有理数に無理数を加えたものですが、これは自然数と1:1の対応がつかない、もっと濃度の大きな無限大であることが次のように示されます。この証明方法はカントールの対角線論法といわれて有名な方法です。

【証明】いま、区間 $[0, 1]$ の実数の集合を R_0 とし、その元 X を考えます。 X は無限小数で表されるので、それを

$$X = 0, X_1, X_2, X_3, \dots$$

と記してみます。さらに、有限小数、例えば0.354などは35999...と表すことに約束します。ここで、実数 R_0 が可算集合と仮定して、

R_0 の元に番号をつけて図Cの $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ のように並べられたとします。ところが、この $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ に入らない小数が存在するのです。それは例えば、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ の桁から対角線上の $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \dots$ を取り出して、そこだけ異なる数 $X_{11}, X_{22}, X_{33}, \dots$ とした数を考えるのです。

$$0, X_{11}, X_{22}, X_{33}, \dots$$

のように作った小数 X は図Cのどの α_i ($i = 1, 2, 3, \dots$)にも入らないのです。なぜならば

$$\text{第1番目の桁が } \alpha_1 \text{ と違うから } X \neq \alpha_1$$

$$\text{第2番目の桁が } \alpha_2 \text{ と違うから } X \neq \alpha_2$$

⋮

となって、上の X はどの α_i ($i = 1, 2, 3, \dots$)とも異なることが

わかります。よって、実数は有理数と1:1の対応がつかない集合であることが示されたこととなります。この集合を非可算集合といいます。

この集合の濃度を \aleph_1 (アレフワン)とすると $\aleph_0 < \aleph_1$ です。 \aleph_1 を連続体の濃度といいます。

■ 無理数について

では、無理数の濃度について考えます。無理数の濃度は実数のそれと同じで \aleph_1 です。

【証明】まずここで無理数の濃度は有理数のそれと同じで \aleph_0 と仮定します。実数は有理数に無理数を加えたもので、実数=有理数+無理数と表すことができます。ところがここで有理数と無理数の濃度が \aleph_0 であるならば、実数の濃度も \aleph_0 となります。しかし実数の濃度は上記より \aleph_1 なのでここで矛盾が起こります。すなわち無理数の濃度は \aleph_0 ではなく、 \aleph_1 であることが示されます。

★ 発展～ルベグ積分への応用～

よって、今集合の濃度を学んだことにより、ルベグ積分の概念もかめることができるようになりました。までの知識からできる積分をしようと思います。 Q は有理数として

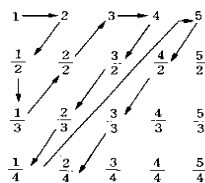
$$\int_0^1 f(x)dx = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$$

この関数は集合の濃度とルベグ積分の概念を用いると次のように表すことができます。

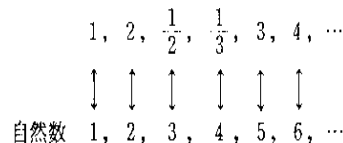
$$\int_0^1 f(x)dx = 1 \times \{[0, 1] \text{区間の有理数の測度}\} + 0 \times \{[0, 1] \text{区間の無理数の測度}\} = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$$

したがって、上の関数の積分値は0になりました

図A



図B



図C

$\alpha_1 = 0,$	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}	...
$\alpha_2 = 0,$	α_{21}	α_{22}	α_{23}	α_{24}	...
$\alpha_3 = 0,$	α_{31}	α_{32}	α_{33}	α_{34}	...
$\alpha_4 = 0,$	α_{41}	α_{42}	α_{43}	α_{44}	...

(6) 抜き打ちテストは実行できるのか!?

～パラドックスの世界から集合の定義へ～

谷道 麻衣

～プロローグ～

ある教授の言葉 『来週の月曜から金曜までの間に1回だけテストを行う。どの日にテストを行うかは当日にならなければ分からない。』さてこの教授、ぬきうちテストはできるのでしょうか?もし金曜に行くとすると、月から木までやらないから金曜に行くことがわかってしまいます。では木曜に行くとすると…

集合論のパラドックス

①ラッセルパラドックス

私達が使っている教科書によると“はっきりした条件を満たすものの集まりを集合という”と集合を定義しています。集合に属するものを要素と名づけています。さて、以下のことを考えます。ある集合 $\{a, b, c\}$ に対し、 x がこの集合の要素であるかどうかは $(x = a) \cup (x = b) \cup (x = c)$ が成立するかどうかを調べればよいわけです。したがって、二つの集合 S_1 と S_2 が与えられれば、それらのどちらにも含まれる要素からなる集合 $S_1 \cap S_2$ というのは簡単に定義でき、

$\{x \mid x \in S_1 \cap x \in S_2\}$ では、“自分の要素でないもの”というのはどう判断すればよいのでしょうか?自分の要素が決まっていれば、上記と同じようにそれらと比べれば良く、 $A = \{a, b, c\}$ とすると、 A の要素でないものは $(x \neq a) \cap (x \neq b) \cap (x \neq c)$ とあらわされます。つまり補集合 $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$ となります。

さてここで問題です。“自分自身の要素でないもの”は集合の記法では $x \notin x$ と書けます。したがって“自分の要素でないものだけを含む集合”は $B = \{x \mid x \notin x\}$ と定義できますが、さて、この集合自身(B と呼ぶことにする)はこの集合の要素でしょうか?もしそうだとすると B は $B \notin B$ を満たすはずだから、 B は B の要素ではありません。しかし、 B が B の要素でないとすると、定義を満たすからこの集合の要素のはずである…?これがラッセルのパラドックスとな

ります。つまり、教科書のように集合を定義すると、パラドックスがおこるのです。では、集合をどのように定義すればよいのでしょうか?

②ZF集合論

パラドックスを回避するために様々な試みが行われてきました。その手法として集合を素朴に要素から定義するのではなく、特定の公理を満たすものとして位置付ける考え方が浮かび上がってきました。それがツェルメロとフランクフルトによるZF集合論なのです。これは以下の公理群から成り立っています。

公理1 $\forall x \quad x \notin \phi$

これは、 ϕ という定数の定義です。つまり ϕ とは要素をもたない定数(空集合)なのです。

公理2 フランケルの置換公理: 任意の集合 a に対して

$$\{y \mid \exists x \in a (x, y) \in A\}$$

A という2要素から構成された集合があるとき、 a が集合であれば、その要素 x と一対一対応がとれる要素 y から構成されるものも集合であるという公理です。全部の要素を一対一に対応づけることのできる集合はみな同じ大きさであるという意味です。

公理3 基底公理 $A \neq \phi \rightarrow \exists x \in A (x \cap A = \phi)$

A が空でない集合ならば、 A の元 x であって A と x とが共通の元を含まないようなものが存在します。これにより、どんな集合も自分自身を含まないことが結論されます。実際、 P を任意の集合とし、 $\{P\}$ を A とおけば、公理3により $\{P\} \cap P = \phi$ でなければならない。したがって、すべての集合は自分の要素ではないのだから $P \notin P$ …※

さて、※よりラッセルのパラドックスを構成する集合 $R = \{x \mid x \notin x\}$ は集合全体の集合となり、 R は公理3を満たさない。つまり R は集合ではなくなるわけです。(Rのことをクラスと呼びます。)

このようにしてラッセルのパラドックスは集合から除外されるわけです。